تحقیق در عملیات1

Operation Research 1

منابع:

۱. تحقیق در عملیات دکتر عامل آذر

۲. برنامه ریزی خطی نویسنده: بازارا ترجمه: دکتر اسماعیل خرم

۳. تحقیق در عملیات دکتر آریانژاد – دکتر سجادی

.حل تمرین بازارا مازیار زاهدی سرشت – شهاب عباسی

نمره: پایان ترم / میان ترم/ تمرین

۱۲ ۵ ۳

رئوس مطالب:

۱. ماتریس ۲. برنامه ریزی خطی ۳. روش ترسیمی. ٤. روش سیمپلکس

۵. دوالیتی – دوگان ٦. آنالیز حساسیت ۷. حمل و نقل

ماتریس: ماتریس یک آرایش مستطیلی از علائم یا مقادیر کمی است که به صورت سطرها و ستون ها منظم شده است.

ماتریس صفر: اگر کلیهٔ درایه ها صفر باشد.

ماتریس قطری: $\forall i \neq j \Rightarrow a = 0$ ماتریس قطری مقادیر قطر اصلی عدد و بقیه صفر باشند.

ماتریس همانی: مقادیر قطر اصلی ۱ باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس مثلثی: اگر تمام عناصر زیر قطر اصلی صفر باشد، ماتریس بالا مثلثی و اگر تمام عناصر بالای قطر اصلی صفر باشد، ماتریس را پایین مثلثی می گویند.

ترانهادهٔ ماتریس: ماتریسی است که با جابجا کردن سطر و ستون یک ماتریس به دست می آید: A^T یا A' یا A^t

ماتریس متقارن: ماتریسی است که ترانه‌ادهٔ آن با خود آن برابر است. $A^T = A$

$$A_{mn}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ازاز کردن ماتریس}} \begin{array}{ll} A_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & A_{12}=\begin{bmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n-2} \\ a_{23} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ A_{21}=\begin{bmatrix} a_{31} & \dots & a_{32} \\ : & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n3} \end{bmatrix} & A_{22}=\begin{bmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ : & & \\ a_{n3} & \dots & a2n \end{bmatrix} \end{array}$$

عملیات روی ماتریس ها:

۱. تساوی ماتریس ها : ماتریس A و B را مساوی گویند، اگر A و B هم مرتبه بوده و عناصر نظیر به نظیر آنها با هم برابر باشند.

۲. جمع ماتریس ها: درایه ها نظیر به نظیر با هم جمع می شوند. $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$

۳. ضرب اسکالر: $KA = K\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$

٤. ضرب ماتریس ها: $A_{m\times k} \times B_{L\times N} = AB_{MN}$

شرط ضرب پذیری: $K=L$

دترمینان: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

ماتریس همسازه: $|A| = a_{11}\underbrace{A_{11}} + a_{12}A_{12} + a_{13}\underbrace{A_{13}}$

همسازهٔ ماتریس

همسازه متناظر: $\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

سطر اول و ستون اول

روش ساروس:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| = {} & a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} + \\ & a_{12} \quad a_{23} \quad a_{31} + \\ & a_{13} \quad a_{21} \quad a_{32} + \\ & -[a_{13} \quad a_{22} \quad a_{33} + \quad a_{12} \quad a_{21} \quad a_{33} + \quad a_{11} \quad a_{23} \quad a_{32}] \end{aligned}$$

خواص دترمینان

۱. اگر کلیهٔ عناصر یک سطر یا ستونی صفر باشد، دترمینان ماتریس برابر صفر است.

۲. اگر جای دو سطر یا دو ستون ماتریس را با هم عوض کنیم، فقط علامت دترمینان تغییر می کند.

۳. اگر عناصر متناظر دو سطر یا ستون در یک ماتریس مساوی باشند، دترمینان ماتریس صفر است.

٤. اگر عناصر سطر i یا ستون j از ماتریس A در یک عدد ضرب شود، دترمینان آن نیز در همان عدد ضرب می شود.

٥. دترمینان ماتریس A با دترمینان ترانهاده اش با هم برابرند.

٦. اگر عناصر یک سطر یا ستون وابستگی خطی به سایر ستون را داشته باشند، دترمینان آن برابر صفر است.

۷. اگر عناصر یک سطر (ستون) را با ترکیب خطی معین از سایر سطرها (ستون ها) جمع کرده و به جای همان سطر (ستون) در ماتریس قرار دهیم، دترمینان هیچ تغییری نمی کند.

ماتریس الحاقی:

$$A^{+} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \text{ مثلاً: } A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ماتریس وارون (معکوس):

اگر A یک ماتریس مربع با دترمینال مخالف صفر باشد (نامنفرد)، دارای ماتریس وارون است که آن را با A^{-1} نشان می دهند که:

روش اول:

$A^{-1}A = AA^{-1} = I \rightarrow$ ماتریس همانی

$A^{-1} = \dfrac{A^{+}}{|A|} \rightarrow$ ماتریس الحاقی

$\rightarrow$ دترمینال ماتریس A

روش دوم: برای به دست آوردن ماتریس معکوس (وارون)

ماتریس افزوده $[A|I]$ را با عملیات سطری مقدماتی به ماتریس افزود $[I|B]$ تبدیل می کنیم،

در آن صورت: $B = A^{-1}$

روش گوس

یادآوری: عملیات سطری:

1. ضرب یک سطر در یک عدد مخالف صفر

۲. اضافه نمودن مضرب از یک سطر به سطر دیگر

استقلال و وابستگی:

تعریف ۱: فضای n بعدی که با En نشان داده می شود، مجموعهٔ تمام بردارهای n بعدی است.

تعریف ۲: اگر بردار $\vec{b}$ و بردارهای $\vec{a_k}$ ... $\vec{a_1}$ از فضای En مفروض باشد، بطوری که داشته باشیم $b = c_1a_1 + \ldots + c_ka_k$ آنگاه بردار b را ترکیب خطی از $A_1,\ldots,A_k$ گویند.

تعریف وابستگی خطی:

اگر داشته باشیم $c_1a_1 \ldots + c_ka_k = 0$ و c_iها همگی صفر نباشند.

آنگاه بردارهای $A_1,\ldots,A_k$ وابستگی خطی اند، اگر $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ در این صورت بردارهای $a_1,\ldots,a_k$ دارای استقلال خطی اند.

استقلال خطی $a_1,\ldots,a_k \Leftarrow c_1a_1 + \ldots + c_ka_k = 0 \Rightarrow c_1 = \ldots = c_k = 0$

مثال: آیا بردارهای زیر مستقل اند؟

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ و } a_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ و } a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0$$

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} c_1 = c_2 = 1 \\ c_3 = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

وابستگی خطی دارند

رتبه یا رنک ماتریس (Rank)

رتبه یک ماتریس $m \times n$ بردار با ماکزیمم تعداد بردارهای مستقل سطری یا ستونی آن ماتریس می باشد و آن را با R(A)=K نشان می دهند.

*حداکثر رتبهٔ یک ماتریس $m \times n$ برابر $\min(M \times N)$ می باشد. $\min(M \times N)$

روش های یافتن رتبهٔ یک ماتریس:

۱. مرتبه یا بعد بزرگترین زیر ماتریسی که دترمینال آن مخالف صفر باشد.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ & \begin{bmatrix} -۲ & ۲ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix} & \\ ۴ & & \\ ۲ & & \end{bmatrix} \Rightarrow A=۰$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow A \neq 0 \Rightarrow R(A)=2$$

اما اگر $(A)=0 \Rightarrow R(A)=1$

۲. وقتی یک ماتریس را از عملیات سطری مقدماتی بتوانیم به فرم زیر تبدیل کنیم، آنگاه r، رنک یا رتبهٔ ماتریس است.

$$\begin{bmatrix} Ir \\ \hline 0 \end{bmatrix} \quad [Ir|0] \quad \left[\begin{array}{c|c} Ir & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

مثال: $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

تمرین: معکوس ماتریس زیر را با روش گوس به دست آورید.

حل:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

باید همانی شود تا B به دست بیاید.

تمرین ۲:
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

باید همانی شود.

$$\begin{array}{c} \frac{R_1}{2} \to R_1 \\ R + R_2 \to R_2 \\ -R_1 + R_3 \to R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{2}{5}R_2 \\ \frac{-R_2}{2} + R_1 \\ \frac{3}{2}R_2 + R_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \frac{۵}{۱۲}R_۳ \\ \frac{-۲}{۵}R_۳ + R_۲ \\ \frac{-۱}{۵}R_۳ + R_۱ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۵}{۱۲} & \frac{-۳}{۱۲} & \frac{-۱}{۱۲} \\ ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۳}{۱۲} & \frac{۳}{۱۲} & \frac{-۱۳}{۱۲} \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{-۱}{۱۲} & \frac{۳}{۱۲} & \frac{۵}{۱۲} \end{array}\right] \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۱۲}\begin{bmatrix} ۵ & -۳ & -۱ \\ ۳ & ۳ & -۳ \\ -۱ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

حل دستگاه معادلات خطی:

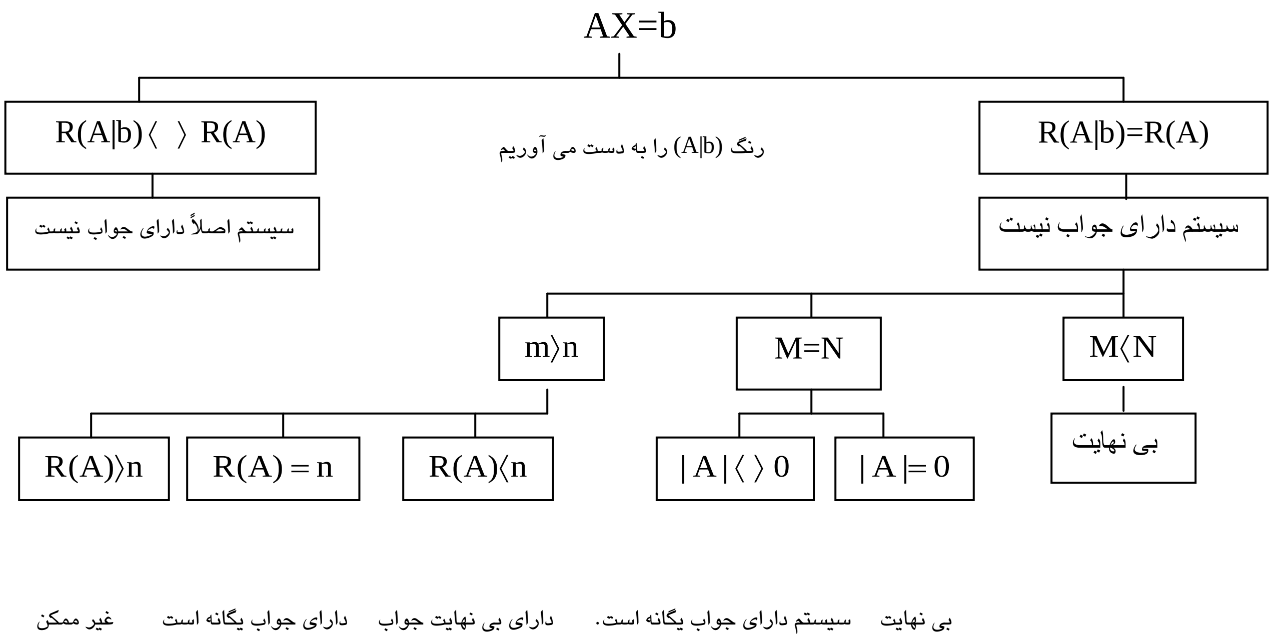
$AX=b$ — m تعداد سطر — $R(A)$ رتبهٔ ماتریسی

$[A]\ [X] = [b]$ — n مجهولات — (A) دترمینان ماتریس

$R(A|b)$ رتبهٔ ماتریس افزوده

$[A]\ [b]$ — $(A|b)$

افزوده $(A\,|\,b)=\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 1 & 6 & 12 \\ 3 & 5 & 8 \end{array}\right]$ دربارهٔ جواب های این مسئله چه می توان گفت؟



مثال: دستگاه AX=b را در نظر بگیرید . در این دستگاه فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۶ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ و ماتریس

افزوده $(A\,|\,b)=\left[\begin{array}{cc|c} ۲ & ۴ & ۱۰ \\ ۱ & ۶ & ۱۲ \\ ۳ & ۵ & ۸ \end{array}\right]$ دربارهٔ جواب های مسئله چه می توان گفت؟

مثل ماتریس معمولی برخورد می کنیم $\begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۱۰ \\ ۱ & ۶ & ۱۲ \\ ۳ & ۵ & ۸ \end{bmatrix}$ $\quad |R\,|\,b| \neq ۰ \Rightarrow R(A\,|\,b)=۳$

$\mathrm{Max}(R)=\mathrm{Min}(m,n)$ $\quad R(A)\leq ۲ \Rightarrow$ جواب ندارد

برنامه ریزی خطی فصل دوم

شاخه ای از برنامه ریزی ریاضی است که با مؤثرترین روش های اختصاص دادن منابع محدود برای فعالیت های شناخته شده و برآوردن هدف خاص مانند ماکزیمم کردن سود و یا می نیمم کردن هزینهٔ مزدکار داریم.

هر مدل برنامه ریزی خطی از سه قسمت تشکیل می شود:

۱. تابع هدف: (objective function) [مقدار تابع هدف OFV) تابعی است که از متغیرهای تصمیم تشکیل یافته و بیان کنندهٔ هدف می باشد . این تابع نشان دهندهٔ خواستهٔ تصمیم گیرنده ها مانند حداکثر کردن سود و یا حداقل کردن هزینه می باشد. تابع هدف برنامه ریزی خطی عمدتاً به شکل یکی از دو عبارت زیر است:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Max}\, z = f(x_j)\,, & j = ۱,\ldots,n \\ \text{یا} & \\ \min z = f(x_j)\,, & j = ۱,\ldots,n \end{array}$$

۲. محدودیت ها یا قیود : عبارت است از یک دستگاه معادله یا نامعادله متشکل از متغیرهای تصمیم که محدودیت های مدل یا تصمیم گیرنده را جهت دستیابی به اهداف مدل بیان می کند.

۳. متغیرهای تصمیم : متغیرهای مجهولی که باید مقدار آنها معین گردد . آنها از یکدیگر مستقل بوده و بهترین آن را برای حل یک مسئله برنامه ریزی خطی انتخاب می کنیم

متغیرهای تصمیم با توجه به مصداق تعیین شده برای آن عمدتاً به دو صورت زیر می باشد:

آزاد در علامت: $X_j \geq ۰ / X_j$

شکل متعارف و استاندارد رسالهٔ برنامه ریزی خطی

	مسئلهٔ Min سازی	مسئلهٔ Max سازی
شکل استاندارد	$\operatorname{Min}\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\text{s.t} \sum_{n=1}^{n} c_{ij} x_j = b_j$ $x_j \geq 0 \quad j=1,\dots,n$	$\max \sum cjxj$ S.t $\sum cijxj = bj$ $xj \geq 0 \quad i=1,\dots,n$
شکل متعارفی	$\operatorname{Min}\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\text{s.t} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$ $x_j \geq 0 \quad j=1,\dots,n$	$\operatorname{Max}\sum c_j x_j$ $\text{s.t} \ \sum a_{ij} x_j \leq b_j$ $x_j \geq 0 - j=1,\dots,n$

«تعریف برخی از واژه های مورد استفاده در برنامه ریزی خطی»

۱. جواب: در برنامه ریزی خطی منظور از جواب نهایی مسئله نیست، بلکه هر مجموعه از مقادیری که به متغیر تصمیم داده می شود، جواب نامیده می شود.

۲. جواب موجه: جوابی است که در تمام محدودیت ها صدق می کند.

۳. جواب غیر موجه: جوابی که حداقل در یک محدودیت صدق نکند.

٤. جواب بهینه: بهترین جواب موجه، جوابی موجه که تابع هدف به مطلوب ترین مقدارش برسد.

۵. منطقهٔ موجه: مجموعهٔ جواب های موجه.

٦. نقطهٔ گوشه ای: (نقطهٔ رأسی) محل تلاقی دو محدودیت می باشد.

چهار فرض برنامه ریزی خطی:

۱. تناسب: مقدار تابع هدف متناسب با تغییر متغیرها تغییر می کند.

۲. جمع پذیری: یعنی متغیرها را می توان با هم جمع نمود و این عبارات به صورت خطی هستند.

۳. بخش پذیری: (کسری بودن) متغیرهای تصمیم بعضی از مسائل فقط در صورتی معنی فیزیکی دارند که عدد صحیح باشد . لیکن جواب های حاصل از برنامه ریزی عدد صحیح نیست، بنابراین فرض بخش پذیری به معنای آن است که هر واحد فعالیت به هر کسر دلخواهی قابل تقسیم است. لذا متغیرهای تصمیم می توانند مقادیر غیر صحیح نیز بگیرند.

٤. معین یا قطعی بودن: به این معنا که تمام پارامترها $(a_{ij}\ , b_j\ , c_j)$ قطعی و غیر احتمالی اند.

بطور کلی فازهایی که یک تیم OR باید طی نماید، عبارتست از: OR:Opration Research

۱. تعریف مسئله ۲. ساخت مدل ۳. حل مدل ٤. متعبر نمودن مدل ٥. اجرای نهایی

فرموله کردن:

برای فرموله نمودن یک مسئله سه مرحلهٔ زیر لازم است:

۱. تشخیص متغیرهای تصمیم

۲. تشخیص تابع هدف

۳. تشخیص قیود یا محدودیت ها

مثال: شرکتی می خواهد برنامه ای برای تولید وسائل آشپزخانه داشته باشد، برای ساختن وسائل شرکت به مادهٔ خام و نیروی انسانی نیازمندیم. کمپانی می خواهد سه کالای B, A و C را تولید کند. دپارتمان تولید اطلاعات در جدول زیر را در اختیار شرکت قرار داده است .

حداکثر در روز می توان kg ۲۰۰ مادهٔ خام تهیه نمود و نیروی انسانی ۱۵۰ ساعت در روز می باشد. مسئله را به صورت برنامه ریزی خطی فرموله نموده و معین کنید میزان تولید هر یک از کالاها چقدر باشد تا سود Max گردد.

X_j: مقدار تولید محصول iام

	A	B	C
کارگر (ساعت)	۷	۳	٦
مادهٔ خام (kg)	٤	٤	٥
سود هر واحد	٤	٢	٣

جواب: $i = A, B, C$

$$Max z = ۴X_{A_۱} + ۲X_{B_۲} + ۳X_{C_۳}$$

S.t :

$$\begin{cases} ۷X_A + ۳X_B + +X_C \leq ۱۵۰ \\ ۴X_A + ۴X_B + ۵X_C \leq ۲۰۰ \\ X_A \ , X_B \ , X_C \geq ۰ \end{cases}$$

مثال: یک لیست از غذاهای ممکن با مقدار مواد مختلف آنها در جدول زیر نشان داده شده است. مدل LP تعیین کنید که هزینهٔ ناشی از مصرف این غذاها حداقل گردد.

X_jمقدار غذای iام   جواب: $i = ۱,۲$

$$Min z = ۴X_{A_۱} + ۲X_{B_۲} + ۳X_{C_۳}$$

S.t :

$$\begin{cases} ۵X_۱ + ۷X_۲ \geq ۸ \\ ۴X_۱ + ۲X_۲ \geq ۵ \\ ۲X_۱ + X_۲ \geq ۴ \\ X_۱ + X_۲ \geq ۰ \end{cases}$$

غذا / مواد	۱	۲	حداقل مواد غذایی لازم
نشاسته	٥	٧	٨
پروتئین	٤	٢	٥
ویتامین	٢	١	٣
هزینه	۰/٦	۰/٣٥	

مثال: فرض کنید از معادن یک و دو سنگ آهن به کارخانه های فولاد سازی ۱ و ۲ و ۳ با داده های جدول زیر حمل می گردد . مدل برنامه ریزی خطی تعیین نمایید که هزینهٔ حمل و نقل کمینه گردد. (مثال حمل و نقل)

X_{ij}: میزان حمل و نقل سنگ از معدن iام به کارخانهٔ jام.

مثلاً X_{12}: میزان حمل و نقل سنگ آهن از معدن ۱ به کارخانهٔ ۲.

کاخانه / معدن	۱	۲	۳	حداکثر مصرف سنگ آهن
۱	۹	١٦	۲۸	۱۰۳
۲	١٤	۲۹	۱۹	۱۹۷
حداقل تقاضای سنگ آهن	۷۱	۱۳۳	۹٦	

$$Minz = ۹X_{۱۱} + ۱۶X_{۱۲} + ۲۸X_{۱۳} + ۱۴X_{۲۱} + ۲۹X_{۲۲} + ۱۹X_{۲۳}$$

محدودیت های عرضه
$$\begin{cases} X_{۱۱} + X_{۱۲} + X_{۱۳} \leq ۱۰۳ & \leq ۱۰۳ \\ X_{۲۱} + X_{۲۲} + X_{۲۳} & \leq ۱۹۷ \end{cases}$$

محدودیت های تقاضا مربوط به کارخانه
$$\begin{cases} X_{۱۱} + X_{۲۱} \geq ۷۱ \\ X_{۱۲} + X_{۲۲} \geq ۱۳۳ \\ X_{۱۳} + X_{۲۳} \geq ۹۶ \\ X_{ij} \geq ۰ \end{cases}$$

تمرین ۱: یک کمپانی دو بازرس در اختیار دارد که به ترتیب آنها را بازرسان درجهٔ ۱ و ۲ می نامیم. کمپانی می خواهد ۱۸۰۰ قطعه هر ۸ ساعت بازرسی نماید. بازرسین درجهٔ ۱ هر ساعت ۲۵ قطعه از کالای مورد نیاز را با دقت ۹۸٪ می تواند بررسی نماید و بازرسان درجهٔ ۲ هر ساعت ۱۵ قطعه از کالا را با دقت ۹۵٪ می توانند بررسی کنند. دستمزد بازرسان درجهٔ ۱، ٤ و بازرسان درجهٔ ۲، ۳ دلار در ساعت است. اگر کالای ناقص بدون کشف عیب از زیر دست بازرسان رد شود، کمپانی ۲ دلار جریمه می پردازد. ضمناً کمپانی حداکثر ۸ بازرس درجهٔ ۱ و ۱۰ بازرس درجهٔ ۲ در اختیار دارد. مقدار هزینه را Min کنید. (بازرسی)

تمرین ۲: یک کارخانهٔ کاغذ سازی سه سفارش برای تهیهٔ توپ های کاغذ که طول و عرض آن در جدول زیر است، تهیه می کنند. در این کارخانه توپ های کاغذ در دو عرض ۱۰ و ۲۰ دسی متر تولید می شود که به اندازه هایی که در سفارش ما آمده بریده می شود، هدف عبارت است از برنامه برای تعیین برش که ضمن کمینه ساختن ضایعات برش تقاضای مورد نظر را برآورد سازد. (ضایعات برش)

سفارش	عرض	طول
۱	۵	۱۰۰۰۰
۲	۷	۳۰۰۰۰
۳	۹	۲۰۰۰۰

روش ترسیمی حل برنامه ریزی خطی:

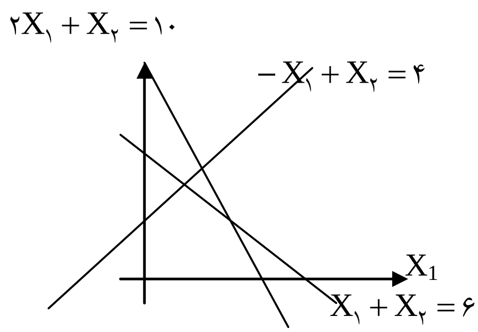
این روش برای حل مدل های خطی دو متغیره قابل برنامه ریزی می باشد که شامل دو قسمت است:

۱. تعیین منطقهٔ موجه: منطقهٔ موجه در مسئله دو متغیره بعد از رسم محدودیت ها امکان پذیر است. منطقهٔ موجه فصل مشترکی از محدودیت ها است که نقاط این منطقه در همهٔ محدودیت ها صدق می کند . برای نمایش منطقهٔ موجه، محور افقی مختصات را برای X_1 و محور عمودی را برای X_2 در نظر می گیریم.

مثال: $Max z = 2X_1 + 3X_2$

$S.t:$

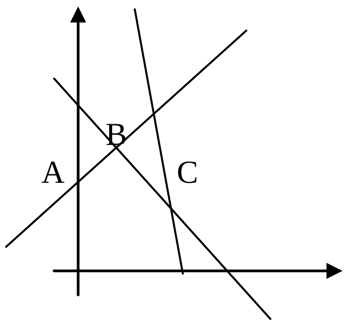
$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \leq 10 \\ -X_1 + X_2 \leq 4 \\ X_1 + X_2 \leq 6 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$



۲. پیدا کردن جواب بهینه: به منظور یافتن جواب بهینه می توان از دو روش استفاده کرد.

الف) بررسی نقاط گوشه ای منطقهٔ موجه . ب) روش آزمون خطا (رسم تابع هدف به ازاء یک مقدار فرضی).

الف) این روش براساس این قضیه که جواب بهینهٔ مسائل برنامه ریزی خطی بر روی یکی از نقاط گوشه منطقهٔ موجه قرار دارد بنا شده است . بدین ترتیب برای یافتن جواب بهینه کافی است مختصات نقاط گوشهٔ موجه را به دست آوریم و در تابع هدف قرار دهیم، آنگاه بهترین مقدار جواب مسئله است.

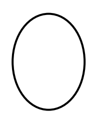


نقاط گوشه ای	O	A	B	C	D
(X_1, X_2)	(۰ و ۰)	(٤ و ۰)	(۵و ۱)	(۲و ٤)	(۰ و ۵)
Z	۰	۱۲	۱۷	۱٤	۱۰

نکته مجموعه های محدب: مجموعۀ X در E^n محدب گفته می شود، اگر به ازاء هر دو نقطۀ مفروض (X_1, X_2) در مجموعۀ X، آنگاه به ازاء هر λ عضو $[0,1]$ داشته باشیم.

$$\lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in X$$

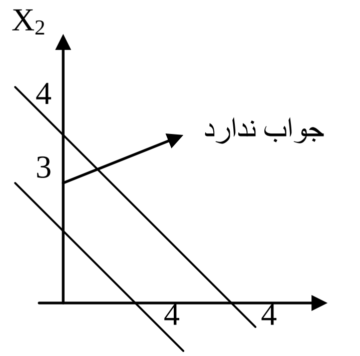
نکته: نمی توان گفت هر منطقۀ موجه دارای تعداد محدودی نقاط رأسی است.

بی نهایت نقطۀ رأسی دارد 

ب) آزمون خطا: در این روش به Z یک مقدار فرضی دلخواه اختصاص داده و تابع هدف که نمایش آن به صورت یک خطا است را ترسیم می کنیم . چنانچه خط تابع هدف در منطقۀ موجه قرار گیرد، خطا را به موازات خود و در جهتی که مقدار تابع هدف را بهینه نماید، حرکت می دهیم. این عمل تا جایی ادامه می یابد که خطا تابع هدف با آخرین نقطه ای که در منطقۀ موجه است، مماس شود. این نقطه نقطۀ بهینه خواهد بود.

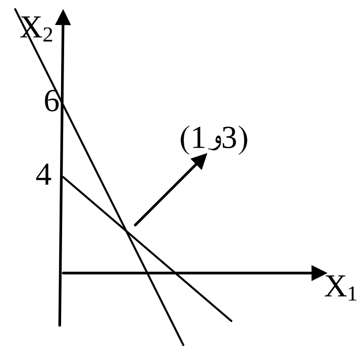
مثال: $\text{Max}Z = ۱۲X_۱ + ۳۶X_۲$

S.t :
$X_۱ + ۲X_۲ \le ۸$
$۳X_۱ + ۴X_۲ \ge ۱۲$
$X_۱ - X_۲ = ۰$
$X_۱ , X_۲ \ge ۰$



مثال: $MaxZ = ۲X_۱ + X_۲$

St
$۶۰X_۱ + ۲۰X_۲ = ۱۲۰$
$۲۰X_۱ + ۲۰X_۲ = ۸۰$
$X_۱ ,\ X_۲ \ge ۰$



خلاصهٔ روش ترسیمی:

۱. در صورتی که متغیرها تصمیم غیر منفی باشد، فقط ربع اول محورهای مختصات را در نظر بگیرید.

۲. هر محدودیت با توجه به علامت تساوی آن به عنوان یک معادله و به صورت یک خطا رسم می شود.

۳.برای رستم قسمت نامعادلل محدودیت یک نقطهٔ دلخواه را در یکی از دو طرف خط انتخاب نموده و مختصات آن را در نامعادله قرار دهید . در صورت صدق، سمت مورد نظر همان سطحی است که نقطهٔ انتخابی شما در آن قرار دارد، و در صورت عدم صدق، سمت مقابل سطح مودر نظر شماست.

٤. برای تمامی محدودیت ها این گام را آن جا م داده و فصل مشترک محدود یت ها را مشخص نمایید.

٥. تابع هدف را برای یک مقدار فرضی دلخواه رسم نمایید و آن را به موازات خود در جهت بهینه نمودن Z حرکت دهید.

٦. آن نقطه گوشه ای که آخرین نقطهٔ تماس خط تابع هدف و حرکت داده شده در مسیر مورد نظر و منطقهٔ موجه را نشان می دهد، نقطهٔ بهینه است.

٧. معادلات محدودیت هایی که نقطهٔ گوشهٔ بهینه از تقاطع آنها تشکیل شده است را پیدا کنید و با حل یک دستگاه معادلهٔ مختصات آن را یافته و با قرار دادن آن در تابع هدف مقدار Z را پیدا کنید.

حالات خاص در برنامه ریزی خطی:

در این قسمت با چند حالت خاص در برنامه ریزی خ طی مواجه خواهید شد که تمامی این حالات بین روش ترسیمی و روش سیمپلکس مشترک و شامل حالات زیر است:

١. عدم وجود جواب موجه ٢. منطقهٔ موجه نامحدود ٣. جواب بهینهٔ چندگانه

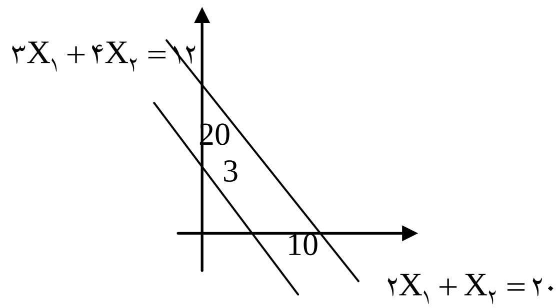
٤. مسئلهٔ تبهگن یا تباهیده یا دژنره:

حالت اول: عدم وجود جواب موجه : این حالت وقتی اتفاق می افتد که مسئله بطور صحیح فرموله نشده باشد و دارای تضاد در محدودیت های مربوط به مدل باشد . در این وضعیت به علت شکل خاص مسئله، هیچ منطقهٔ توجهی نمی توان یافت.

مثال : $\text{Max} = ۳X_۱ + ۲X_۲$

S.t :

$$\begin{cases} ۲X_۱ + X_۲ \geq ۲۰ \\ ۳X_۱ + ۴X_۲ \leq ۱۲ \\ X_۱ , X_۲ \geq ۰ \end{cases}$$



حالت دوم: منطقهٔ موجه محدود باشد، جواب مسئله می تواند نامحدود یا محدود باشد.

الف) منطقهٔ موجه نامحدود، جواب بهینه نامحدود

*تمرین جواب بهینه در امتداد چه محوری در حال رشد است؟

ب) منطقهٔ موجه نامحدود، جواب بهینه محدود

مثال: $\text{MaxZ} = ۶X_۱ + ۲X_۲$

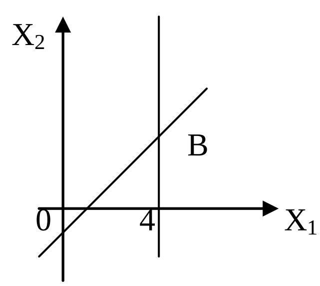
S.t :

$$\begin{cases} ۲X_۱ - X_۲ \leq ۲ \\ X_۱ \leq ۴ \\ X_۱ , X_۲ \geq ۰ \end{cases}$$

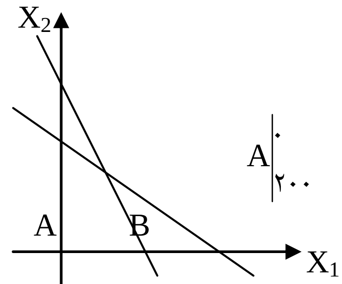
$\text{MinZ} = ۶X_۱ + ۲X_۲$

S.t :

$$\begin{cases} ۲X_۱ - X_۲ \leq ۲ \\ X_۱ \leq ۴ \\ X_۱ , X_۲ \geq ۰ \end{cases}$$



حالت سوم: جواب بهینهٔ چندگانه : هنگامی جواب بهینه خواهیم داشت که تابع هدف موازی یکی از محدودیت های در برگیرندهٔ جواب بهینه باشد . در این حالت تعداد جواب بهینه، بی نهایت می باشد که جواب Z بهینهٔ یکسانی را ارائه می دهد.



$A\begin{vmatrix} ۰ \\ ۲۰۰ \end{vmatrix}$ $B\begin{vmatrix} ۱۸۵ \\ ۱۰۷ \end{vmatrix}$

$۱۰X_۱ + ۶X_۲ = ۲۵۰۰$ $۵X_۱ + ۱۰X_۲ = ۲۰۰۰$

مثال: $MaxZ = ۱۰X_۱ + ۲۰X_۲$

S.t :

$$\begin{cases} ۱۰X_۱ + ۶X_۲ \le ۲۵۰۰ \\ ۵X_۱ + ۱۰X_۲ \le ۲۰۰۰ \\ X_۱ , X_۲ \ge ۰ \end{cases}$$

محدودیت $۵X_۱ + ۱۰X_۲$ موازی $۱۰X_۱ + ۲۰X_۲$ است. نقاط A و B را در MaxZ می گذاریم

$\Rightarrow Z^* = ۴۰۰۰ \Leftarrow$

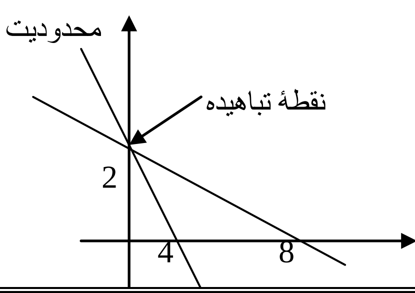
$$\alpha_۱ X_۱ + (۱ - \alpha_۲) X_۲$$

(ترکیب به دست آوردن معادلهٔ خط $\begin{matrix} \alpha_۱ + \alpha_۲ = ۱ \\ ۰ \le \alpha_۱ , \alpha_۲ \le ۱ \end{matrix}$ $\Rightarrow \alpha_۱ \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲۰۰ \end{bmatrix} + \alpha_۲ \begin{bmatrix} ۱۸۵ \\ ۱۰۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_۱ \\ X_۲ \end{bmatrix}$

خطی)

حالت چهارم: تبهگن یا تباهیده : هنگامی که یکی از نقاط کارایی از تقاطع بیش از دو محدودیت به وجود آید، جواب مسئله تبهگن است.

مثال: $MaxZ = ۳X_۱ + ۹X_۲$



S.t :

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 , x_2 \ge 0 \end{cases}$$

*هیچ رابطه ای بین زاید بودن و تباهیدگی وجود ندارد.

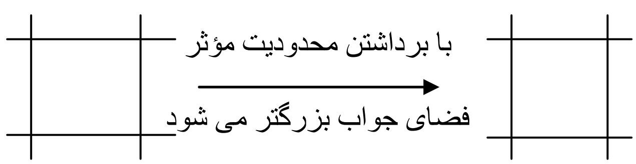
تمرین ۲.٤٥ حل شود.

طبقه بندی محدودیت ها در برنامه ریزی خطی

با توجه به تأثیر محدودیت ها در منطقهٔ موجه، محدودیت ها را می توان طبقه بندی کرد:

۱. محدودیت های زائد   ۲. محدودیت های مؤثر

مؤثر: محدودیت هایی هستند که در تشکیل منطقهٔ موجه مؤثر بوده و اضافه کردن هر محدودیت مؤثر جدید به مدل، موجب کاهش منطقهٔ موجه بر حذف آن موجب افزایش منطقه موجه می گردد.



زائد: محدودیتی است که تأثیری در ایجاد منطقهٔ موجه نداشته و وجود یا عدم وجود آن، موجب تغییر در منطقهٔ موجه نمی گردد.

اگر محدودیت را برداریم ← فضای جواب کوچکتر نمی شود./ جواب بزرگتر نمی شود/بهتر نمی شود.

اگر متغیر اضافه کنیم ← یک بعد به مسئله اضافه می شود ./ جواب بهتر نمی شود / فضا بزرگتر می شود.

تمرین فصل ۱. شمارهٔ ۳۴ صفحهٔ ۴۱ و ۳۵ و تمرین ۵۴ و ۴۶ و ۳۹ و ۴۹ و ۵۱ ← فصل ۲

به اثبات توجه کنید.

سیمپلکس:

کاربرد روش های هندسی برای حل مسائل کوچک (با تعداد کمی متغیر) مناسب است، اما چنانچه مسائل با بعد وسیع را مورد نظر قرار دهیم، آنگاه کاربرد مسائل هندسی بسیار پیچیده و چه بسا غیر ممکن می باشد.

روش عمومی حل مسائل با بعد وسیع روش سیمپلکس است که عبارت است از:

تجسس برای یافتن جواب های پایه ای شدنی (یعنی با ارزش های غیر منفی برای متغیرها) و به دنبال آن یافتن جواب مطلوب است.

(Main یا Max) بهینه $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots a_{n\times n} = \sum_{i=1}^{n} C_1X_1$

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots a_{n\times n} = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}X_1 - a_{m2}X_2 + \ldots a_{mn}X_n = b_m \end{cases}$$

$$X_i \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,n \quad X = (X_1,\ldots,X_n)$$

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{m1} & a_{m2} & \ldots \end{matrix} & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$C = (C_1,\ldots,C_n)$$

بهینه کنید:
$$\begin{aligned} & Z = C^T X \\ & S.t: \\ & \quad AX = b \\ & \quad X \geq 0 \end{aligned}$$

برای حل مسئله برنامه ریزی خطی نیاز به حل دستگاه AX=b می شود. در واقع نیاز به حل دستگاه AX=b موسوم به جواب های پایه ای یا گوشه ای خواهیم داشت.

یادآوری: بطور کلی در حل دستگاه معادلات سه حالت وجود دارد:

۱. دستگاهی که در آن تعداد متغیرها با تعداد معادلات که همگی مستقل خطی و سازگار باشد برابر است.

←در این حالت دستگاه دارای جواب منجر به فرد برای متغیرها است.

۲. دستگاهی که در آن تعداد معادلات مستقل خطی و سازگار بیش از تعداد متغیرها باشد.

←برای اینگونه دستگاه جوابی وجود ندارد.

۳. دستگاهی که در آن تعداد متغیرها بیش از تعداد معادلاتی است که همگی مستقل خطی است.

← این دستگاه بی نهایت جواب دارد.

تعریف حل اساسی : ماتریس A شامل n بردار می باشد . m بردار مستقل خطی A را معادلات $m\times n$ داریم که حتماً دارای جواب است.

جوابی که بدین ترتیب برای دستگاه AX=b به دست می آید، یک جواب گوشه ای یا پایه ای است.

$\text{if } |B|\neq 0 \rightarrow$ مستقل خطی است

یک حل اساسی شدنی باید دارای خاصیت های ذیل باشد:

۱. دترمینان معادلاتی که در پایه قرار گرفته اند مخالف صفر باشد، $|B|\neq 0$

۲. جواب های به دست آمده برای متغیرها شدنی باشد و در معادلات صدق کند

به متغیری که دارای مقدار غیر صفر باشد، متغیر پایه ای یا اساسی و به متغیری که مقدار صفر داشته باشد، متفغیر غیر اساسی یا غیر پایه ای گویند.

(در صورت عدم وجود انحطاط (تبهگنی))

حداکثر مقدار جواب های پایه ای برابر است با: $\binom{n}{m} = \frac{m!}{m!(n-m)!}$

نکته: هر مسئله برنامه ریزی خطی قابل تبدیل به فرم استاندارد می باشد.

تعریف متغیرهای کمکی:

دو نوع متغیر کمکی داریم:

۱. متغیر کمبود: اگر بعضی از محدودیت ها به صورت کوچکتر مساوی باشند، می توانیم با اضافه کردن متغیر کمبود در سمت چپ نامعادله محدودیت ها را به معادله تبدیل نمود

۲. متغیر مازاد: اگر بعضی از محدودیت ها به صورت بزرگتر مساوی باشند، می توانیم با کسر کردن یک متغیر مازاد از سمت چپ معادلهٔ محدودیت ها به یک معادله تبدل کنیم.

مثال:
$$\begin{aligned} &3X_1 + X_2 \le 5 \quad \Rightarrow \quad 2X_1 + X_2 + S = 5 \\ &2X_1 + X_2 \ge 5 \quad \Rightarrow \quad 2X_1 + X_2 - S = 5 \end{aligned}$$

نکته: اگر تابعی بر حسب می نیمم سازی (ماکزیم سازی) باشد، آن را می توان به ماکزیمم سازی (می نیمم سازی) تبدیل کرد.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}Z = 4X_1 + 3X_2 - 5X_3 \\ &\Rightarrow \mathrm{Max}(-Z) = 4X_1 - 3X_2 + 5X_3 \end{aligned}$$

نکته: اگر متغیر تصمیمی به صورت آزاد از علامت ظاهر شود، آن را به صورت تفاضل دو متغیر می نویسیم، بطوری که دو متغیر جدید بزرگتر مساوی با صفر باشد.

آزاد در علامت

X_1, X_2

$X_1 = X_{11} - X_{12} \qquad X_{11}, X_{12} \geq 0$

$X_2 = X_{21} - X_{22} \qquad X_{21}, X_{22} \geq 0$

مثال:

$$\begin{cases} 3X_1 + X_2 + X_3 \leq 2 \\ X_1 \qquad\quad - X_3 \geq 2 \\ X_3 \geq 0 \end{cases}$$

چون وابستگی خطی دارند باید یکی صفر باشد.

فصل ۳ تمرین ٤ و تمرین ۱ و فصل ۲ تمرین ٥٤

اصول روش سیمپلکس

روش سیمپلکس یک الگوریتم است و یک الگوریتم به فرآیند حلی اطلاق می شود که قدم به قدم شروع به حل مسئله نماید.

یعنی یک رویهٔ نظام گرا آنقدر تکرار می گردد تا به جواب مطلوب برسد. مجموع قدم هایی که به صورت سیستماتیک در هر بار تکرار می شود، یک تکرار نامیده می شود.

نکتهٔ۱: سیمپلکس عمدتاً از مبدأ مختصات شروع می کند و سپس به یک نقطهٔ گوشه ای موجه مجاور که مقدار تابع هدف را بهبود می بخشد، حرکت می کند.

این کار را تا رسیدن به نقطهٔ موجهی که از نقاط موجه اطراف بهتر باشد، ادامه می دهد.

نکتهٔ ۲: روش سیمپلکس یک روش جبری است که هر تکرار آن مستلزم حل یک دستگاه معادله برای یک جواب جدید می باشد.

فرم کانونی یک دستگاه:

صورتی از یک دستگاه معادلات که هر معادله دارای یک متغیر پایه با ضریب ۱ باشد و این متغیر در سایر معادلات غیر پایه ای (صفر) باشد.

مثال:

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 = 2 \\ X_1 + X_2 \leq 3 \rightarrow X_1 + X_2 + S_1 = 3 \\ X_1 + 2X_2 \geq 2 \rightarrow X_1 + 2X_2 - S_2 + R_1 = 2 \\ X_1 + 4X_2 = 5 \rightarrow X_1 + 4X_2 + R_2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccc} X_3 & S_1 & R_1 & R_2 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = b \qquad \Rightarrow \qquad X = A^{-1}b$$

$$\begin{bmatrix} X_3 \\ S_1 \\ R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

قدم های اساسی در حل سیمپلکس

۱. شروع با یک جواب پایه قابل قبول در فرم استاندارد و متعارف

۲. آزمایش بهینگی: برای این کار به سطر Z در جدول سیمپلکس نگاه می کنیم . اگر برای مسئله ماکزیمم سازی در سطر Z همگی اعداد غیر منفی بود، جواب بهینه است.

۳. یک متغیر غیر پایه را انتخاب می کنیم تا متغیر پایهٔ جدید گردد . معمولاً متغیر غیر پایه ضریبش در سطر Z کمترین مقدار است.

٤. مشص کردن متغیر پایه ای که می بایست جای خود را به متغیر پایهٔ جدید داده و خود خارج شود و یا تبدیل به غیر پایه شود . برای این کار با استفاده از دو محدودیت مشخص

می نماییم که متغیر غیر پایه تا چه اندازه می تواند افزایش یابد . برای محدودیت هایی که متغیر غیر پایه دارای ضریب مثبت باشد، حد تغییرات برابر است با مقدار ثابت سمت راست تقسیم بر آن ضریب مثبت.

و برای محدودیت های دیگر این نسبت را برابر با بی نهایت قرار می دهیم . سپس محدودیت با کوچکترین نسبت مشخص گردیده و متغیر پایه در آن محدودیت غیر پایه شده و خارج می گردد، این قاعده را تست می نیمم می نامند.

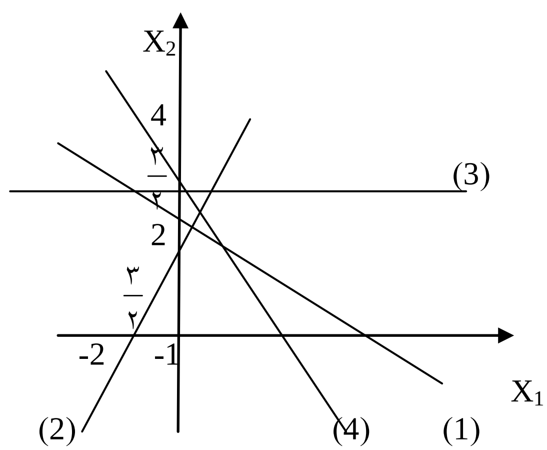
۵. سیستم متعارف جدید را توسط عملیات محوری به دست آورده و به گام دوم برمی گردیم.

مثال: $\max Z = ۴X_۱ + ۳X_۲$

ابتدا به روش ترسیمی»

St :

$$\begin{cases} ۲x_۱ + ۳x_۲ \le ۶ \\ -۳x_۱ + ۲x_۲ \le ۳ \\ ۲x_۲ \le ۵ \\ ۲x_۱ + x_۲ \le ۴ \\ x_۱ , x_۲ \ge ۰ \end{cases}$$



نقاط گوشه	Z
(o,o)	۰
$\left(o, \frac{۳}{۲}\right)$	٤/٥
$\left(\frac{۶}{۱۳}, \frac{۲۴}{۱۳}\right)$	$\frac{۹۶}{۱۳}$
$\left(\frac{۳}{۲}, ۱\right)$	۹
$(۲,۱)$	۸
	$\Downarrow$
	$Z^* = ۹$

استاندارد سازی $\Downarrow$

$$MaxZ - ۴X_۱ - ۳X_۲ = ۰$$

St :

$$\begin{aligned} & ۲X_۱ + ۳X_۲ + S_۱ = ۶ \\ & ۳X_۱ + ۲X_۲ + S_۲ = ۳ \\ & ۲X_۲ + S_۳ = ۵ \\ & ۲X_۱ + X_۲ + S_۱ = ۴ \\ & X_۱ , X_۲ \ge ۰ \\ & S_۱ , S_۲ , S_۳ , S_۴ \ge ۰ \end{aligned}$$

متغیرهای پایه ای		X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	مقادیر RHS سمت راست
با منفی و صفرکاری نداریم و ∞ قرار می دهیم	$S_۱$	۲	۳	۱	٥	٥	٥	۶
	$S_۲$	۳	۲	٥	۱	٥	٥	۳
خارج شونده (عنصر لولا)	$S_۳$	٥	۲	٥	٥	۱	٥	۵
	$S_۴$	۲	۱	٥	٥	٥	٥	۴
	Z	-٤	-۳	٥	٥	٥	٥	O
ورود به پایه (فرقی ندارد یکی را انتخاب می کنیم)	$S_۱$	٥	۲	۱	٥	٥	-۱	۲
	$S_۲$	٥	۷/۲	٥	۱	٥	۳/۲	۹
مقادیر سمت راست بردار را بر ستون لولا تقسیم می کنیم.	$S_۳$	٥	۲	٥	٥	۱	٥	۵
	$X_۱$	۱	۱/۲	٥	٥	٥	۱/۲	۲
$\left(\frac{۶}{۲},\infty,\infty,\frac{۴}{۲}\right)$uin $= S_۴ \quad ۲$	Z	۱	-۱	٥	٥	٥	۲	۸
lin$\left(\frac{۲}{۱},\frac{۹}{\frac{۷}{۲}},\frac{۵}{۲},\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}\right)$	$X_۲$	٥	۱	۱/۲	٥	٥	-۱/۲	۱
	$S_۲$	٥	٥	-۷/۴	۱	٥	۱۳/۴	۱۱/۲
$\left(۲,\frac{۱۸}{۷},\frac{۵}{۲},۴\right) = S_{۱۲}$	$S_۳$	٥	٥	-۱	٥	۱	٥	۳
	$X_۱$	۱	٥	-۱/۴	٥	٥	۳/۱	۳/۲
	Z	٥	٥	۱/۲	٥	٥	۳/۲	۹

$Z^* = ۹ \qquad X_۱^* = \frac{۳}{۲} \qquad X_۲^* = ۱$

فصل ۳

تمرین ۱۰

تمرین

۱۳ تمرین ۱۷

مثال: $MaxZ = ۵X_۱ + ۲X_۲ + ۳X_۳ - X_۴ + X_۵$

$$\begin{aligned} S.t:& \\ X_۱ + ۲X_۲ + ۲X_۳ + X_۴ &= ۸ \\ ۳X_۱ + ۴X_۲ + X_۳ + X_۵ &= ۷ \end{aligned}$$

$-RX_۴ + R_Z \to R_Z$

$,RX_۵ + R_Z \to R_Z$

متغیر پایه ای	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$	$X_۴$	$X_۵$	RHS
$X_۴$	۱	۲	۲	۱	۰	۸
$X_۵$	۳	۴	۱	۰	۱	۷
Z	۵−	۲−	۳−	۱	۱−	۰
$X_۴$	۱	۲	۲	۱	۰	۸
$X_۵$	۳	۴	۱	۰	۱	۷
Z	−۳	۰	−٤	۰	۰	−۱
$X_۳$	$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۱}{۳}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۴
$X_۵$	$\frac{۵}{۲}$			۰	$\frac{-۱}{۲}$	۳
Z	−۱	٤	۰	۲	۰	۱۵
$X_۳$	۰	$\frac{۲}{۵}$	۱	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۱۷}{۵}$
$X_۱$	۱	$\frac{۶}{۵}$	۰	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{۶}{۵}$
Z	۰	$\frac{۲۶}{۵}$	۰	$\frac{۹}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۸۱}{۵}$

تست $Min\left(\frac{۹}{۲}, \frac{۷}{۱}\right) = ۴$ خارج شوندهاز پایه $X_۴$

تست $Min\left(\frac{۴}{\frac{۱}{۲}}, \frac{۳}{\frac{۵}{۲}}\right) = \frac{۶}{۵}$ خارج از پایه

$X_۱^* = \frac{۶}{۵}$ $X_۳^* = \frac{۱۷}{۱۵}$

$Z^* = \frac{۸۱}{۵}$

حالات خاص در روش سیمپلکس

۱. بهینهٔ چندگانه (دگرین): هرگاه متغیر غیر پایه در سطر Z جدول نهایی صفر باشد، نشان دهندهٔ چندگانه بودن جواب بهینهٔ یک مسئلهٔ LP است. در این حالت متغیری که ضریب آن در سطر Z صفر باشد، به عنوان متغیر ورودی انتخاب می شود و جواب گوشهٔ بهینهٔ دیگری به دست خواهد آمد. (مقدار Z تغییری نمی کند) در نهایت ترکیب محدب این دو نقطه مجموعهٔ جواب مسئلهٔLP خواهد بود.

$$\mathrm{Max}Z = ۳X_۱ + ۲X_۲ \le ۴ \quad \Rightarrow \mathrm{Max}Z - ۳X_۱ - ۲X_۲ = ۰$$

S.t :

$$\begin{cases} -X_۱ + ۲X_۲ \le ۴ \\ ۳X_۱ + ۲X_۲ \le ۱۴ \\ X_۱ - X_۲ \le ۳ \\ X_۱ , X_۲ \ge ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -X_۱ + ۲X_۲ + S_۱ = ۴ \\ ۳X_۱ + ۲X_۲ + S_۲ = ۱۴ \\ X_۱ - X_۲ + S_۳ = ۳ \\ X_۱ , X_۲ , S_۱ , S_۲ , S_۳ \ge ۰ \end{cases}$$

م پایه	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	RHS
$S_۱$	-۱	۲	۱	0	0	۴	تست Min $\left\{\frac{۴}{-۱}, \frac{۱۴}{۳}, \frac{۳}{۱}\right\}$
$S_۲$	۳	۲	0	۱	0	۱۴	∞
$S_۳$	۱	-۱	0	0	۱	۳	
Z	-3	-2	0	0	0	0	∞
$S_۱$	0	۱	۱	0	۱	۷	تست Min $\left\{\frac{۷}{۱}, \frac{۵}{۵}, \frac{۳}{-۱}\right\}$
$S_۲$	0	۵	0	۱	-۳	۵	∞
$X_۱$	۱	-۱	0	0	۱	۳	
Z	0	-۵	0	0	۳	۹	
S_1	0	0	1	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{۸}{۵}$	٦	

X_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1
X_2	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	4
Z	0	0	0	1	0	14
S_3	0	0	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{8}$	1	$\frac{15}{4}$
S_2	0	1	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{13}{4}$
S_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{2}$

بهینه

$S_1 = 6$

$X_1 = 4$

$X_2 = 1$

$S_2, S_3 = 0$

$$S_3 = \frac{15}{4} \quad X_1\ \frac{5}{3} \quad X_2\ \frac{13}{4} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{B}{4} \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad 0 \le \lambda \le 1$$

۳. مسئلهٔ تبهگن، تباهیده، درنژه:

یک جواب پایه ای در صورتی تبهگن است که حداقل یکی از متغیرهای پایه ای در آن برابر صفر باشد. چنانچه رتبهٔ ماتریس A برابر با m فرض شود، شرط سازگاری B با فضای A آن است که بتوان B را به صورت یک ترکیب خطی از m بردار تشکیل دهندهٔ رتبهٔ A نشان داد. چنانچه بتوان B را به صورت یک ترکیب خطی از $m-1$ بردار نشان داد، به این معنیاست که مختصات یکی از بردارها برابر صفر است.

این حالت هنگامی رخ می دهد که برای انتخاب بردار خارج شونده از پایه براساس قاعدهٔ می نیمم با دو نسبت مساوی مواجه شویم. در این صورت هر دو متغیر پایه متناظر با این نسبت ها می تواند پایه را ترک کند.

اما یکی از آنها را انتخاب نموده و خارج می سازیم . در این صورت متغیر دیگری که می توانست از پایه خارج شود، در جدول بعدی دارای مقدار صفر است . چنین متغیری که متغیر پایه بوده، ولی مقدار آن صفر است را متغیر تبهگن گویند.

$$MaxZ = ۳X_۱ + ۹X_۲$$

S.t :

$$X_۱ + ۴X_۲ \leq ۸$$
$$X_۱ + ۲X_۲ \leq ۴$$
$$X_۱ , X_۲ \geq ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_۱ + ۴X_۲ + S_۱ = ۸ \\ X_۱ + ۲X_۲ + S_۲ = ۴ \\ X_۱ , X_۲ , S_۱ , S_۲ \geq ۰ \end{cases}$$

		X_1	S_2	S_1	S_2	RHS
جدول بهینه شده	$S_۱$	۱	۴	۱	۰	۸
	$S_۲$	۱	۲	۰	۱	۴
متغیر پایه ای =۰	Z	-۳	-۹	۰	۰	۰
تبهگن رفع	$S_۱$	-۱	۰	۱	-۲	۰
ناشدنی	$S_۲$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	۲
	Z	$\frac{۳}{۲}$	۰	۰	$\frac{۹}{۲}$	۱۸

$X_۱ = ۰$
$X_۲ = ۲$
$S_۱ = ۰$
$S_۲ = ۰$

$$MaxZ = ۲X_۱ + X_۲$$

S.t :

$$۴x_۱ + ۳x_۲ \leq ۱۲$$
$$۴x_۱ + x_۲ \leq ۸$$
$$۴x_۱ - x_۲ \leq ۸$$
$$x_۱ , x_۲ \geq ۰$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
$S_۱$	۴	۳	۱	۰	۰	۱۲
$S_۲$ $\left\{\frac{۱۲}{۴۱},\frac{۸}{۴},\frac{۸}{۴}\right\}$ Min	۴	۱	۰	۱	۰	۸
$S_۳$	۴	-۱	۰	۰	۱	۸
Z	-۲	-۱	۰	۰	۰	۰
$S_۱$	۰	۲	۱	-۱	۰	۴
$\left\{\frac{۴}{۲},\frac{۲}{\frac{۱}{۴}},\infty\right\}$ $X_۱$ Min	۱	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	۲
$S_۳$	۰	-۲	۰	-۱	۱	۰
Z جدول بهینه نیست.	۰	$\frac{-۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	٤
$X_۲$	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{-۱}{۲}$	۰	تباهیدگی رفع شدنی
$X_۱$	۱	۰	$\frac{-۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	۰	۲
$S_۳$	۰	۰	$\frac{۱}{۴}$	-۲	۱	$\frac{۳}{۲}$ ۴
Z	۰	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	۰	۵

۳. منطقهٔ موجه نامحدود: زمانی روبرو می شویم که با تست نسبت می نیمم قادر به تعیین متغیر خارج شونده نشویم، و این هنگامی است هیچ کدام از ضرایب متغیر وارد شونده (ستون لولا) مثبت نباشد، در این صورت مسئله دارای جواب های بی کران یا نامتناهی است.

$$MaxZ = ۲X_۱ + ۳X_۲$$

S.t :

$$\begin{cases} X_۱ - X_۲ \le ۲ \\ ۳X_۱ + X_۲ \le ۴ \end{cases}$$

متغیر های پایه ای	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS	
$S_۱$	۱	−۱	۱	۰	۲	$\mathrm{Min}(\infty,۴) = S_۲$
$S_۲$	−۳	۱	۰	۱	۴	
Z	−۲	−۳	۰	۰	۰	
$S_۱$	−۲	۰	۱	۱	۶	
$X_۲$	−۳	۱	۰	۱	۴	
Z	−۱۱	۰	۰	۳	۱۲	

✓ عنصر وارد شونده به پایه وجود دارد.

✓ عنصر خارج شونده از پایه نداریم.

مثال: $\mathrm{Max}Z = ۶X_۱ - ۲X_۲$

S.t :

$۲X_۱ - X_۲ \leq ۲$

$X_۱ \leq ۴$

$X_۱ , X_۲ \geq ۰$

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS
S_1	۲	−۱	۱	۰	۲
S_2	۱	۰	۰	۱	٤
Z	−٦	۲	۰	۰	O

X_1	۱	−۱/۲	۱/۲	۱/۲	۱
S_2	٥	۱/۲	−۱/۲	−۱۲	
Z	٥	−۱	۳	٥	٦
X_1	۱	٥	٥	۱	۴
X_2	٥	۱	−۱	۲	۶
Z	٥	٥	۲	۲	۱۲

*بطور کلی اگر در یکی از تکرارهای سیمپلکس تمام ضرایب متغیرهای غیر پایه که می تواند پایه شود، (سطر Z آن مثبت نباشد) جواب بهینه مسئلهٔ بی کران است، ولی اگر مثبت باشد، جواب ممکن است کران دار یا بی کران باشد.

٤. عدم وجود منطقهٔ موجه

متغیرهای مصنوعی در محدودیت های بزرگتر مساوی از آن جا که متغیرهای کمکی را از سمت چپ معادله باید کم کنیم، تا حالت تساوی در محدودیت ها برقرار گردد، متغیرهای کمکی را نمی توان به عنوان یک متغیر اساسی برای شروع مسئله در نظر گرفت، چرا که ضریب ۱− دارد. همچنین در محدودیت هایی که به صورت تساوی هستند، از آن جا که متغیرهای کمکی به کار گرفته نمی شود، در شروع عملیات از این متغیرها (متغیرهای مصنوعی) استفاده می شود. به این جهت باید در دو حالت فوق از متغیرهای غیر منفی جدیدی که متغیرهای مصنوعی نامیده می شود، به عنوان متغیرهای اساسی شروع مسئله استفاده کرد و به اولین جواب موجه برسیم . تفاوت این متغیر با متغیرهای

تصمیم و یا کمکی این است که این متغیرها دارای مصادیق فیزیکی می باشند، ولی متغیرهای مصنوعی فقط جنبهٔ محاسباتی دارند.

در صورتی که یک مسئله دارای منطقهٔ موجه و جواب بهینه باشد، مقادیر متغیر مصنوعی که با R نشان داده می شود، در جدول نهایی به صفر می رسد و غیر صفر شدن این متغیر درجدول نهایی به معنی فاقد منطقهٔ موجه بودن مسئله است.

فصل ۳: تمرین ۱۸ و ۱۹ و ۲۲ و ۲۳.

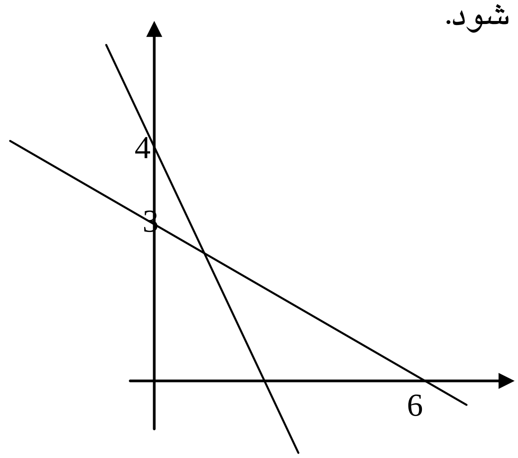
حل مسئلهٔ LP با متغیرهای مصنوعی (R)

۱. روش M بزرگ ۲. روش دو فازی (دو مرحله ای)

۱. متغیر مصنوعی R را با ضریب M وارد تابع هدف می کنیم که M عدد بزرگی است، اگر تابع از نوع Max باشد، به صورت MR− و اگر از نوع Minباشد، به صورت MR+ وارد تابع هدف می شود.

حل:

مثال: $MaxZ = ۳X_۱ + ۲X_۲$



$S.t:$

$$\begin{cases} ۲X_۱ + X_۲ \le ۴ \\ X_۱ + ۲X_۲ \ge ۶ \\ X_۱ , X_۲ \ge o \end{cases}$$

$$MaxZ - ۳X_۱ - ۲X_۱ + MR$$

$$\begin{cases} ۲X_۱ + X_۲ + S_۱ = ۴ \\ X_۱ + ۲X_۱ - S_۲ + R = ۶ \\ X_۱ , X_۲ , S_۱ , S۲ , R \ge o \end{cases}$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	R	RHS
$S_۱$	۲	۱	۱	۰	۰	۴
R	۱	۲	۰	−۱	۱	۶
Z	−۳	−۲	۰	۰	M	۰
$S_۱$	$\frac{۳}{۲}$	۰	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{-۱}{۲}$	۱
$X_۲$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۰	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۳
Z	−۲	۰	۰	۱	M+۱	۶
$X_۱$	۱	۰	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{-۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$
$X_۲$	۰	۱	$\frac{-۱}{۳}$	$\frac{-۲}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۸}{۳}$
Z	۰	۰	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{-۱}{۳}$	$M = \frac{۱}{۳}$	$\frac{۲۲}{۳}$
$S_۲$	۳	۰	۲	۱	−۱	۲
$X_۲$	۲	۱	۱	۰		۴
	۱	۰	۲	۰	M	۸

$\Rightarrow X_۱ = ۰$

$X_۲ = ۴$

روش دوفاری (دو مرحله ای)

از آن جا که روش M بزرگ در محاسبات کامپیوتری از ثبات کمتری برخوردار است، از روش دو فازی برای این گونه مسائل استفاده می شود.

هر دو روش M بزرگ و دو فاز یک سلسله جواب های اساسی موجه یکسان را به دست می آورند.

فاز ۱:در این روش مانند روش M بزرگ، ابتدا با استفاده از وارد کردن متغیرهای مصنوعی محدودیت ها به صورت معادله و شکل متعارف در آورده شده، آنگاه از یک تابع هدف که از مجموع متغیرهای مصنوعی موجود در محدودیت ها تشکیل یافته است $(\sum R_i)$ به جای تابع هدف اصلی مسئله استفاده می شود. آنگاه تابع هدف جدید با محدودیت های اصلی کمینه می سازد. اگر مسئله دارای یک فضای شدنی باشد، مقدار تابع هدف جدید برابر صفر خواهد شد. (حاکی از صفر شدن تمام متغیر مصنوعی است).

در این صورت باید به فاز دوم برویم . در غیر این صورت مقدار کمینه تابع هدف جدید بزرگتر از صفر خواهد شد، در این جا حداقل یک متغیر مصنوعی مخالف صفر است و لذا جواب شدنی وجود ندارد.

فاز۲: در این مرحله جواب پایه قابل قبول پیدا شده، در جدول نهایی فاز یک را به عنوان جواب پایه ای اولیه برای تابع هدف اصلی در نظر گرفته و آن را بهینه می نماییم . به عبارت دیگر، آخرین جواب فاز ۱ اولین جواب فاز ۲ خواهد بود (البته با حذف قسمت های مربوط به متغیرهای مصنوعی).

حل: $MaxZ = ۳X_۱ + ۲X_۲$ $MinW = R_۱ + R_۲$

فاز اول: برای یافتن اولین نقطۀ شدنی

	X_1	X_2	S_2	S_1	R	RHS	
$S_۱$	۲	۱	۱	۰	۰	۴	
R	۱	۲	۰	−۱	۱	۶	
W	۱	۲	۰	−۱	۰	٦	به هنگام شدن

S۱	۳/۲	٥	۱	۱/۲	−۱/۲	۱
X۲	۱/۲	۱	٥	−۱/۲	۱/۲	۳
W	٥	٥	٥	٥	۱	٥

پایان فاز I

	X1	X2	S۱	S۲	RHS
S۱	۳/۲	٥	۱	۱/۲	۱
X۲	۱/۲	۱	٥	−۱/۲	۳
Z	−۳	−۲	٥	0	O
S۱	۱	٥	۲/۳	۱/۳	۲/۳
X۲	٥	۱	−۱/۳	−۲/۳	۲/۳
	٥	٥	۴/۳	−۱/۳	۲۲/۳
	۳	٥	۲	۱	۲
	۲	۱	۱	٥	۴
	۱	٥	۲	٥	۸
W	٥	٥	٥	٥	O

نکات

نکتهٔ ۱: در روش سیمپلکس متغیری که از پایه خارج می شود، نمی تواند بلافاصله در جدول بعدی وارد پایه شود.

نکتهٔ ۲: در روش سیمپلکس متغیری که وارد پایه شود، ممکن است در جدول بعدی از پایه خارج شود.

نکتهٔ ۳: فاز یک روش دو فاز نقطهٔ رأسی شدنی را پیدا کرده و سپس فاز دوم جواب بهینه را می یابد.

نکتهٔ ٤: تعداد تکرارهای مسائلی که به روش M بزرگ و دو فاز حل می شود، با هم برابر است.

نکتهٔ ٥: در انتهای فاز ۱ هیچ وقت به جواب بهینهٔ کران دار نمی رسیم و همیشه دارای جواب بهینهٔ کران دار هستیم.

نکتهٔ ٦: مسئلهٔ فاز ۱ و مسئلهٔ M بزرگ همیشه دارای جواب شدنی $X=0$, $R=b$ می باشد.

نکتهٔ ۷: وقتی روی یک محدویت بایستیم، آن محدودیت فعال است. لذا متغیر کمکی مربوط به آن صفر است.

نکتهٔ ۸: دو نقطه را مجاور گویند، اگر فقط در یک متغیر پایه ای و به تبع آن یک متغیر غیر پایه ای با هم تفاوت داشته باشد.

نکتهٔ ۹: در عدم وجود تباهیدگی بین نقاط گوشه ای و جواب های پایه ای شدنی تناظر یک به یک برقرار است.

نکتهٔ ۱۰: در مسائل M بزرگ و دوفازی ابتدا از یک نقطهٔ نشدنی برای مسئله شروع به حل کرده تا یک نقطهٔ شدنی برای مسئله بیابیم. سپس آن نقطه را بهینه می کنیم.

فصل ٤: تمرین ۳ و ۲۲ و ۲۳ و ۲۷

فصل ٦: تمرین ۱ و ٦ و

دوگان – دوگانگی – دوالیتی – مزدوج – ثانویه (Dual)

هر مسئلهٔ برنامه ریزی خطی یک مسئلهٔ ثانویهٔ وابسته به خود دارد . خود مسئله را مسئله اولیهٔ (P) می نامند و دیگری مسئلهٔ Dual می نامند. این مسئله خواص وابستهٔ بسیار نزدیکی به هم دارند، بطوری که جواب بهینه یکی از مسائل اولیهٔ دوگان جواب بهینهٔ مسئلهٔ دیگری را می دهد.

قاعدهٔ کلی برای نوشتن دوگان یک مسئلهٔ LP

فرض کنید شکل مسئلهٔ اولیه Max سازی است.

۱. تابع هدف تابع دوگان به صورت Min ارائه می شود.

۲. تعداد متغیرهای دوگان برابر تعداد قیود برای X=b است.

علامت متغیرهای دوگان بستگی به این دارد که قیود به صورت نامساوی یا مساوی ارائه شده باشد و اگر قیدی به صورت تساوی باشد، متغیر دوگان متناظر با آن آزاد از علامت است و اگر به صورت کوچکتر مساوی باشد، متغیر دوگان متناظر با آن مساوی صفر است و اگر به صورت بزرگتر مساوی باشد، متغیر دوگان متناظر با آن برابر صفر است.

۳. تعداد قیود مسئله دوگان برابر با تعداد متغیرها در مسئلهٔ اولیه است . اگر متغیر اولیه آزاد از علامت باشد، قیود کلی مربوط به آن به صورت تساوی است و اگر متغیر اولیه به صورت نامساوی باشد، قیود کلی متناظر با آن هم علامت متغیر اولیه بیان می شود.

٤. بردار سود مسئلهٔ اولیه (ضریب تابع هدف) مقادیر سمت راست مسئلهٔ دوگان را تشکیل می دهد.

٥. بردار مقادیر سمت راست مسئلهٔ اولیه (b) ضریب تابع هدف مسئلهٔ دوگان می گودد.

٦. ترانهادهٔ ماتریس ضرایب ماتریس اولیه، ماتریس ضرایب مسئلهٔ دوگان می گردد.

$$AX = b$$
$$A^T y = C$$

مثال: $MaxZ = X_۱ + ۲X_۲ - ۳X_۳ + ۴X_۴$

$S.t:$
$$y_۱ \quad X_۱ + ۲X_۲ + ۲X_۳ - ۳X_۴ \le ۲۵$$
$$y_۲ \quad -۲X_۱ - X_۲ + ۳X_۳ - ۲X_۴ \ge ۱۰$$
$$y_۳ \quad -۵X_۱ - X_۲ - ۳X_۳ + ۳X_۴ = ۳$$
$$X_۱, X_۲ \ge ۰$$

$X_۳ \le ۰$ آزاد در علامت $X_۴$

$MinW = ۲۵y_۱ + ۱۰y_۲ + ۳y_۳ \ge ۱$

$S.t:$
$$y_۱ + ۲y_۲ - ۵y_۳ \ge ۱$$
$$۲y_۱ - y_۲ + y_۳ \ge ۲$$
$$۲y_۱ + ۳y_۲ - ۳y_۳ \le -۳$$
$$-۳y_۱ - ۲y_۲ + ۳y_۳ = ۴$$

$$y_۱ + ۲y_۲ - ۵y_۳ \ge ۱$$
$$۲y_۱ - y_۲ + y_۳ \ge ۲$$
$$۲y_۱ + ۳y_۲ - ۳y_۳ \le -۳$$
$$-۲y_۱ - ۳y_۲ - ۳y_۳ \le -۳$$

$y_1 \geq 0$ $y_2 \leq 0$ y آزاد در علامت

قضیهٔ ۱: دوگانِ دوگان، مسئله اولیه است.

قضیهٔ ۲: (ضعیف دوگانگی): هر جواب قابل قبول مسئلهٔ دوگان سازی (یال) همیشه بزرگتر مساوی دو جواب قابل قبول مسئلهٔ Max سازی (اولیه) است.

نتیجه: ۱. اگر مسئلهٔ اولیه جواب قابل قبول داشته باشد، ولی مقدار تابع هدف آن نامحدود باشد، مسئلهٔ دوگان دارای جواب قابل قبول نمی باشد.

۲. اگر مسئلهٔ دوگان جواب قابل قبول داشته باشد، ولی تعداد تابع هدف آنها نامحدود باشد، مسئلهٔ اولیه جواب قابل قبول نخواهد داشت.

۳. اگر مسئلهٔ اولیه دارای جواب قابل قبول باشد، ولی دوگان جواب قابل قبول نداشته باشد، آنگاه مسئلهٔ اولیه نامحدود می باشد.

٤. اگو مسئلهٔ دوگان دارای جواب قابل قبول باشد، ولی مسئلهٔ اولیه جواب قابل قبولی نداشته باشد، آنگاه مسئلهٔ دوگان نامحدود است.

قضیهٔ قوی دوگانگی : اگر مسئلهٔ اولیه شدنی و متناهی باشد، آنگاه جواب های بهینهٔ مسئلهٔ ثانویه وجود دارد، بطوری که $C^T x^* = b^T y^*$

به عبارت دیگر، جواب های قابل قوبل x^* و y^* موجود باشند، بطوری که مقادیر تابع هدف اولیهٔ دوگان به ازاء این جواب ها برابر باشند، آنگاه این جواب ها نقاط بهینه می باشند.

نکته: اگر یکی از مسائل اولیه یا ثانویه نشدنی باشد آنگاه، دیگری یا نشدنی است یا متناهی.

اولیه / دوگان	نشدنی	بهینه	نامتناهی
نشدنی	امکان دارد	امکان ندارد	امکان دارد
بهینه	امکان ندرد	امکان دارد	امکان ندارد
نامتناهی	امکان دارد	امکان ندارد	امکان ندارد

الگوریتم سیمپلکس دوگان

الگوریتم سیمپلکس ثانویه به منظور حذف متغیرهای مصنوعی در مسئلهٔ LP مورد استفاده قرار می گیرد. روش سیمپلکس با جواب های غیر بهینه سر و کار دارد وسعی می کند تا با ایجاد شرایط بهینگی به سمت جواب بهینه پیشرفت کند، به عبارت دیگر اساس برنامه ریزی خطی در به دست آوردن جواب بهینه برقراری دو شرط بهینگی و شدنی بودن (موجه بودن) است.

شرط موجه بودن با غیر منفی نگه داشتن اعداد سمت راست در محدودیت های جدول سیمپلکس اعمال می شود و شرط بهینگی مسئله در صورت Max بودن با غیر منفی بودن اعداد سطر Z وقوع می کند. جدول وقتی بهینه است که هم موجه و هم بهینه باشد، یعنی در تمامی حل مسئله شرط موجه بودن حفظ می شود، تا اینکه نهایتاً با برقراری شرط بهینگی به جواب بهینه می رسد، در مقابل سیمپلکس دوگان مستقیماً با جواب های بهتر از بهینه (فوق بهینه) سر و کار دارد و با کوشش در موجه کردن آنها به سوی جواب بهینه حرکت می کند.

به عبارت دیگر شرط استفاده از الگوریتم سیمپلکس ثانوبه وجود شرط بهینگی در مسئله است.

مراحل:

۱. مسئله را به فرم استاندارد در آورید.

۲. یک جواب اساسی را که بهینه، ولی غیر موجه است را انتخاب و جدول LP سیمپلکس ثانویه را ایجاد نمایید.

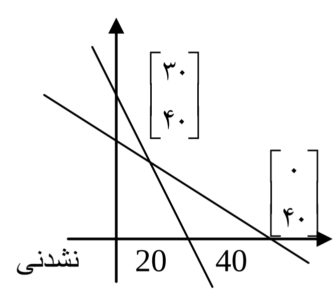
۳. انتخاب بردار و یا متغیر خروجی از پایه : منفی ترین عدد سمت راست را انتخاب کنید.(اختیاری) سطر مربوط به این متغیر را سطر لولا می نامیم و متغیر اساسی مربوط به این سطر را خروجی می نامیم. در صورتی که تمام اعداد سمت راست غیر منفی باشد، جواب اساسی فعلی موجه و بهینه است، در غیر این صورت به گام بعد بروید.

٤. انتخاب بردار ورودی به پایه: متغیر ورودی را با تقسیم اعداد سطر Z به اعداد منفی سطر لولا و انتخاب بزرگترین اعداد (کوچکترین عدد از نظر قدر مطلق) را انتخاب می کنیم.

ستون زیر متغیر ورودی در محدودیت ها را ستون لولا بنامید . اگر تمامی عناصر سطر لولا غیر منفی باشد، مسئله فاقد جواب های موجه است.

۵. عملیات محوری را انجام می دهیم تا جدول به صورت متعارف تبدیل شود، سپس به گام ۳ باز می گردد.

$\text{Min}Z = ۱۲X_۱ + ۵X_۲$ $\qquad$ $\text{Max}Z = -۱۲X_۱ - ۵X_۲$



S.t :

$$\begin{cases} ۴X_۱ + ۲X_۲ \geq ۸۰ \\ ۲X_۱ + ۳X_۲ \geq ۹۰ \\ X_۱ , X_۲ \geq ۰ \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{array}{l} -۴X_۱ - ۲X_۲ + S_۱ = -۸۰ \\ -۲X_۱ - ۳X_۲ + S_۲ = -۹۰ \\ X_۱ , X_۲ S_۱ , S_۲ \geq ۰ \end{array}$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS	
$S_۱$	-۴	-۲	۱	۰	-۸۰	نشدنی
بهینگی داریم $S_۲$	-۲	-۳	۰	۱	-۹۰	
Z	-۱۲	-۵	۰	۰	۰	
$S_۱$	$\frac{-۸}{۳}$	۰	۱	$\frac{-۲}{۳}$	-۲۰	
$X_۲$	$\frac{۲}{۳}$	۱	۰	$\frac{-۱}{۳}$	۳۰	$\text{Min}\left\{\begin{array}{c}\frac{۵}{۳}\\ \frac{-۲}{۳}\end{array}\right.$
Z	$\frac{۲۶}{۳}$	۰	۰	$\frac{۵}{۳}$	-۱۵۰	
$S_۲$	۴	۰	$\frac{-۳}{۲}$	۱	۳۰	
$X_۲$	۲	۱	$\frac{-۱}{۲}$	۰	۴۰	جواب بهتر نمی شود اما شدنی می شود
	۲	۰	$\frac{۵}{۳}$	۰	-۲۰۰	

جواب بهینهٔ مسئلهٔ اولیه شامل کلیهٔ اطلاعات موجود در جدول بهینهٔ ثانویه می باشد . و به همین ترتیب با استفاده از جدول بهینهٔ مسئلهٔ ثانویهٔ (D) می توان اطلاعات مربوط به جدول مسئلهٔ P را به دست آورد. برای آن جام این کار:

۱. یکی از دو مسئلهٔ P و D را برای حل انتخاب می کنیم و جدول بهینه را به دست می آوریم.

۲. جواب بهینهٔ مسئلهٔ D در سطر Z جواب بهینهٔ مسئلهٔ P قرار دارد.

۳. مقدار متغیرهای تصمیم مسئلهٔ D در زیر ستون های متغیرهای پایه ای شروع مسئله در جدول ابتدایی مسئلهٔ P قرار دارد، که برای یافتن آنها به حالات زیر توجه می کنیم:

الف) اگر مسئله در فرم مخالف و استاندارد باشد، مقدار متغیر تصمیم دوگان دقیقاً برابر همان مقادیر به دست آمده در بند ۳ است.

ب) اگر متغیر پایهٔ مصنوعی باشد، در این صورت از مقدار به دست آمده در بند ۳، M را حذف می کنیم.

ج) اگر مسئله با این صورت باشد که ماتریس پایه یکه باشد، ولی ضریب این متغیرها در تابع هدف صفر نباشد، در این صورت به مقدار به دست آمده در بند ۳ باید ضریب این متغیر در تابع هدف را اضافه کرد.

طرز به دست آوردن $B^{-۱}$:

$B^{-۱}$ در هر جدول در ستون متغیرهایی قرار دارد که در جدول ابتدایی به صورت متغیر پایه انتخاب شده اند، مشروط به این که در جدول ابتدایی، ماتریس B یکه باشد.

قضیه: شرایط کمبود تکمیلی (رابطهٔ کمکی مکمل) CS

بین جواب های بهینه مسئلهٔ P و D رابطهٔ زیر برقرار است.

$$X_j^*.L_j^* = ۰ \qquad j = ۱,...,n$$
$$y_i^*.S_i^* = ۰$$

$X_j^* =$ جواب بهینهٔ مسئلهٔ P

$y_j^* =$ جواب بهینهٔ مسئلهٔ D

$L_j^* =$ متغیر کمکی j در مسئلهٔ D

$S_i =$ متغیر کمکی j در مسئلهٔ P

نتیجه: اگر X^* یک نقطهٔ شدنی مسئلهٔ P و y^* یک نقطهٔ شدنی در مسئلهٔ D باشد و به علاوه

داشته باشیم $\begin{matrix} X_j^*.L_j^* = ۰ \\ y_i^*.S_i^* = ۰ \end{matrix}$ نتیجه می گیریم:

X^* و y^* نقاط بهینهٔ مسئلهٔ P و D می باشند.

$$MaxZ = ۷X_۱ + ۱۰X_۲$$

$$S.t:$$

$$\begin{cases} ۳X_۱ + ۲X_۲ \\ ۲X_۱ + ۴X_۲ \le ۴۰ \\ X_۱, X_۲ \ge ۰ \end{cases}$$

از روش سیمپلکس معمولی

تابع نهایی	X_1	X_2	S_1	S_2	RHS	
$X_۱$	۱	٥	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{-۱}{۴}$	۸	
$X_۲$	٥	۱	$\frac{-۱}{۴}$	$\frac{۳}{۸}$	۶	$y_۲ = ۲\begin{cases} y_۱ = ۱ \\ \end{cases}$
Z	٥	٥	۱	۲	۱۱٦	$B^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{-۱}{۴} \\ \frac{-۱}{۴} & \frac{۳}{۸} \end{bmatrix}$

طبق قضیهٔ مکمل تکمیلی $\begin{matrix} X_۱ = ۸ \\ X_۲ = ۶ \end{matrix} \xrightarrow{CS} \begin{matrix} L_۱ = ۰ \\ L_۲ = ۰ \end{matrix} \Rightarrow X_۱L_۱ = ۰$

$$۳y_۱+۳y_۲\geq ۷\Rightarrow ۳y_۱+۲y_۲-\underset{o}{\cancel{L}}=۷\quad\Rightarrow\begin{cases}۳y_۱+۲y_۲=۷\\ ۲y_۱+۴y_۲=۱۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} y_۱=۱\\ y_۲=۲\end{matrix}$$

تعبیر اقتصادی و خصوصیات دوگان

نکتهٔ ۱: در هر جدول زیر متغیرهای اساسی در سطر Z، $C_BB^{-۱}$ یا مقدار متغیرهای دوگان قرار دارد (به شرطی که ضریب تابع هدف متغیرهای اساسی اولیه صفر باشد).

نکتهٔ ۲: وقتی جواب مسئله بهینه نیست، جواب متناظر دوگان آن غیر موجه است و برعکس.

نکتهٔ ۳: محدودیت $a_{ji}X_۱+...a_{in}X_n\leq b_i$ را در نظر بگیرید، b_i را موجودی انبار نامیده و متغیر دوگان متناظرش در بهینگی را کران بالای قیمت خرید یک واحد اضافه تر کالای I برای انبار I می نامیم.

نکتهٔ ٤: محدودیت $a_{ji}X_۱+...a_{in}X_n\geq b_i$ را در نظر بگیرید، b_i را تولید محصول I نامیده و متغیر دوگانش در بهینگی (قیمت سایه) را کران پایین قیمت فروش یک واحد اضافه تر محصول iام می نامیم.

نکتهٔ ٥: اگر یکی از مسائل اول دوگان دارای جواب بهینهٔ چندگانه باشد، دیگری دارای جواب بهینهٔ تبهگن است.

-: اگر یکی از مسائل اول دوگان دارای جواب بهینهٔ تب هگن باشد، دیگری ممکن است دارای جواب بهینهٔ چندگانه باشد.

سیمپلکس اصلاح شده – تجدید نظر شده – ماتریسی – جبری Modified

ضریب متغیرها در تابع هدف $\begin{matrix}C=(C_B,C_N)\\ A=(B\ ,\ N)\end{matrix}$ $\quad MinZ=C^TX$

S.t :

$AX = b$ $X = (X_B, X_N)^T$ ضریب متغیرها در محدودیت ها

$X \geq ۰$

$$MinZ = (C_B, C_N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = C_B X_B + C_N X_N$$

S.t :

$$(B, N)\begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix} = b \Rightarrow BX_B + NX_N = b(*)$$

$X_B, X_N \geq ۰$

$$(*)B^{-۱} \rightarrow X_B = bB^{-۱} - NB^{-۱}X_N$$

$$Z = C_B\left(\underbrace{B^{-۱}b - B^{-۱}NX_N}_{X_B}\right) + C_N X_N$$

$$= C_B B^{-۱}b - \left(\underbrace{C_B B^{-۱}N}_{Z_N} - C_N\right)X_N$$

$$X_N = ۰ \quad \Rightarrow Z = C_B B^{-۱}b$$

$$X_B = B^{-۱}b$$

	X_B	X_N	RHS
X_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
Z	O	$C_B B^{-1}N - C_N$	$C_B B^{-1}b$

$$MaxZ = ۵X_۱ + ۲X_۲ + ۳X_۳ - X_۴ + X_۵$$

S.t :

$$X_۱ + ۲X_۲ + ۲X_۳ + X_۴ = ۸$$

$$۳X_۱ + ۴X_۲ + X_۳ + X_۵ = ۷$$

$$X_j \geq ۰ \qquad j = ۱, \ldots, ۵$$

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad X=(X_۱ \quad X_۲ \quad X_۳ \quad X_۴ \quad X_۵)$$

$$C=(۵ \quad ۲ \quad ۳ \quad -۱ \quad ۱) \qquad X_B=(X_۴ \quad X_۵)$$

$$C_B=(-۱ \quad ۱) \qquad X_N=(X_۱ \quad x_۲ \quad x_۳)$$

$$B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$C_N=(۰ \quad ۲ \quad ۳) \qquad N=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$B^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad X_B=B^{-۱}b\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۸ \\ ۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ \\ ۷ \end{bmatrix}$$

$$=Z=C_BB^{-۱}b=(-۱,۱)\begin{bmatrix} ۸ \\ ۷ \end{bmatrix}=-۱ \Rightarrow (-۱ \quad ۱)\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۱ \end{pmatrix}$$

$$=(۲ \quad ۲ \quad -۱)-(۵ \quad ۲ \quad ۳)=(-۳ \quad ۰ \quad -۴)-(۵ \quad ۲ \quad ۳)$$

ورود به پایه $X_۳$ $\Rightarrow$ $X_۴$ خارج از پایه $\qquad$ به هنگام $a'_۳=B^{-۳}a_۳$

به هنگام $a'_۳=B^{-۳}a_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$

Min تست $\theta=\text{Min}\left(\frac{۸}{۲},\frac{۷}{۱}\right)=۴$

همان از جا که برداشتیم، همان جا قرار می دهیم.

$$X_B=(X_۳\ ,\ X_۵) \qquad B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$X_N=(X_۱ \quad X_۲ \quad X_۳) \qquad N=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$B^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & o\\ \frac{-۱}{۲} & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-۱}b=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & o\\ \frac{-۱}{۲} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۸\\ ۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\ ۳\end{bmatrix}$$

$$Z=C_BB^{-۱}=\begin{bmatrix}۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ o\end{bmatrix}=۱۵$$

$$C_BB^{-۱}N-C_N=\begin{bmatrix}۳ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & o\\ \frac{-۱}{۲} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۳ & ۴ & o\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}o & ۲ & ۱\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-۷ & -۴ & ۲\end{bmatrix}$$

$$a_۱=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & o\\ \frac{-۱}{۲} & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}\\ \frac{۵}{۲}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Min}\left(\frac{۴}{\frac{۱}{۲}},\frac{۳}{\frac{۵}{۲}}\right)=\left(۸,\frac{۶}{۵}\right)$$ از پایه خارج $X_۵$

$$B=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow B^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۳}{۵} & \frac{-۱}{۵}\\ \frac{-۱}{۵} & \frac{۲}{۵}\end{bmatrix}$$

مرحلهٔ سوم: $B^{-۱}b=\begin{bmatrix}\frac{۱۷}{۵}\\ \frac{۶}{۵}\end{bmatrix}$ $\qquad Z=C_BB^{-۱}b=\frac{۸۱}{۵}$

$$C_BB^{-۱}N-N_N=\begin{bmatrix}\frac{۲۶}{۵},\frac{۹}{۵},\frac{۲}{۵}\end{bmatrix}\geq ۰ \qquad a'_۱=B^{-۱}a_۱$$

جدول بهینه است.

نکته: برخی روابط مهم در جدول سیمپلکس:

$\frac{۵Z}{۵X_j}=C_j-Z_j$ $\qquad$ $j\in$ غیر پایه ای

$\frac{۵X_B}{۵X_j}=-y_j$ $\qquad$ ستون jام $\frac{۵X_B}{۵X_j}=-y_{ij}$ $\qquad$ عنصر iام از ستون jام

مقدار متغیر دوگان $\frac{\delta Z}{\delta b} = C_B B^{-1}$ عنصر iام از ستون jام $\frac{\delta X_B}{\delta X_j} = -y_{ij}$

$\frac{\delta X_B}{\delta b} = B^{-1}$ مقدار iام متغیر دوگان $\frac{\delta Z}{\delta b_i} = W_i$

تمرین: فصل ٦: ۴ و ۸ و ۹ و ۱۹ و ۲۸ و ۲۹ و ۳۰ و ۳۱ در ۷ برگ

$-3X_1 + X_2 + X_3$ در

$$
\begin{aligned}
&S.t:\\
&X_1 - 2X_2 + X_3 \le 11\\
&-4X_1 + X_2 + 2X_3 > 3\\
&2X_1 - X_3 = -1\\
&X_1, X_2, X_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

آنالیز حساسیت یا تجزیه و تحلیل حساسیت (٤ نمره) امتحان تمرین میان ترم

حذفی نیست ۱۵/ ۳/ ۳/

تجزیه و تحلیل حساسیت هنگامی صورت می گیرد که برای مسئلهٔ اولیه جواب نهایی (حل بهینه) را به دست آورده باشند و سپس بخواهیم مسئله را از نظر موارد زیر تجزیه و تحلیل کنیم.

۱. تغییر در مقادیر سمت راست محدودیت ها

۲. تغییر در مقادیر ضرایب متغیرها در تابع هدف

۳. تغییر در مقادیر ضرایب متغیرها در محدودیت ها

٤. اضافه کردن متغیر جدید به مسئله

۵. اضافه کردن محدودیت جدید به مسئله

پس از اعمال مقادیر فوق، سه حالت زیر می تواند رخ بدهد:

۱. متغرهای اساسی در جدول باقی مانده ومقادیر آنها نیز تغییر نکند.

۲. متغیرهای اساسی در جدول باقی مانده، ولی مقادیر آنها تغییر کند.

۳. جدول نهایی از بهینه بودن خارج شده و باید آن را به روش مناسب ادامه حل داد.

روابط ماتریسی زیر برای به هنگام کردن جدول نهایی ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

$$a'_j = B^{-1} a_j \qquad C'_j = C_j - C_B B^{-1} a_j = C_j - C_B a'_j$$

$$\bar{b} = b' = B^{-1} B \qquad Z = C_B B^{-1} b = C_B b'$$

۱. ((تغییر در مقادیر سمت راست محدودیت ها (b_j)))

قدم اول: با استفاده از رابطهٔ $\bar{b} = B^{-1} b$ بردار مقادیر سمت راست جدول نهایی را به دست آورده و آن را در جدول به هنگام نمایید.

قدم دوم: با استفاده از رابطهٔ $Z = C_B B^{-1} b = C_B b'$ مقدار تابع هدف در جدول نهایی را بیابید و آن را در جدول به هنگام نمایید.

قدم سوم: چنانچه در مقادیر سمت راست جدول نهایی مقدار منفی مشاهده نشد، جدول کماکان بهینه است، ولی در صورتی که مقدار منفی مشاهده شود، با استفاده از روش سیمپلکس دوگان مسئله را حل می کنیم.

مثال: یک مسئلهٔ برنامه ریزی خطی و جدول نهایی به صورت زیر داده شده است.

اصلی که در آن $S_۱$ و $S_۲$ متغیرهای خفیف (کمکی)(لازم برای استاندارد کردن مسئله هستند .

اگر سمت راست محدودیت دوم مسئله به ۱۱۲۵ کاهش یابد، جواب نهایی چه تغییری می کند؟

$$\text{MinZ} = -۱۲X_۱ - ۲۰X_۲ - ۱۸X_۳ - ۴۰X_۴$$

$$\begin{aligned} &\text{S.t}: \\ &۴X_۱ + ۹X_۲ + ۷X_۳ + ۱۰X_۴ \le ۶۰۰۰ \\ &X_۱ + X_۲ + ۳X_۳ + ۴۰X_۴ \le ۴۰۰۰ \\ &X_۱, X_۲, X_۳, X_۴ \ge ۰ \end{aligned}$$

جواب نهایی	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1 S_2	RHS	
$X_۱$ $X_۴$	۱ o	$\frac{۷}{۳}$ $\frac{-۱}{۳۰}$	$\frac{۵}{۳}$ $\frac{۱}{۳۰}$	o ۱	$\begin{bmatrix} \frac{۴}{۱۵} & \frac{-۱}{۱۵} \\ \frac{-۱}{۱۵} & \frac{-۴}{۱۵} \end{bmatrix}$	۱۳۳۳/۳ ۶۶/۷	$\rightarrow B^{-۱}b$
Z	o	$\frac{-۲۰}{۳}$	$\frac{-۱۰}{۳}$	o	$\begin{pmatrix} \frac{-۴۴}{۱۵} & \frac{-۴}{۱۵} \end{pmatrix}$	۱۸۶۶۶/۷	$\rightarrow C_B B^{-۱}b$

مقادیر متغیرهای دوگان $W_j = y_j$

$$\Rightarrow b' = \bar{b} = B^{-۱}b = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۱۵} & \frac{-۱}{۵} \\ \frac{-۱}{۱۵} & \frac{۲}{۷۵} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۶۰۰۰ \\ ۱۱۲۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۵۲۵ \\ -۱۰ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Z = C_B b' = \begin{bmatrix} -۱۲ & -۴۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۱۲۵ \\ -۱۰ \end{bmatrix} = -۱۷۹۰۰$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	
X_1	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{4}{15}$	$\frac{-1}{15}$	1525
X_4	0	$\frac{-1}{30}$	$\frac{1}{30}$	1	$\frac{-1}{15}$	$\frac{2}{75}$	-10 سیمپلکس دوگان
Z	0	$\frac{-20}{3}$	$\frac{-10}{3}$	0	$\frac{-44}{15}$	$\frac{-4}{15}$	-17900
X_1	1	0	4	7	$\frac{-1}{15}$	$\frac{9}{5}$	825
X_2	0	1	-1	-30	$\frac{1}{5}$	$\frac{-4}{5}$	300
Z	0	0	-10	-200	$\frac{-8}{5}$	$\frac{-28}{5}$	15900

$$\mathrm{MiN}\left\{\left|\frac{\frac{-20}{3}}{\frac{-1}{30}}\right| \text{ و } \frac{\frac{-44}{15}}{\frac{-1}{15}}\right\} = \{200 \text{ و } 440\}$$

تمرین: دامنهٔ تغییرات مقادیر سمت راست محدودیت ها را به گونه ای تعیین کنید که متغیرهای X_1 و X_4 در پایه بماند.

۳. ((تغییر در مقادیر ضرایب متغیرهای غیر اساسی در تابع هدف))

قدم اول: با استفاده از $\overline{C}_j = C_j - C_B B^{-1} a_j$ مقدار $\overline{C}_j$ را برای متغیر مورد نظر بیابیم.

قدم دوم: چنانچه $\overline{C}_j$ به دست آمده غیر منفی بود (در Max سازی)، حل نهایی فعلی کماکان بهینه بوده و مقادیر متغیرهای اساسی نیز بدون تغییر باقی می ماند، در غیر این صورت با قرار دادن $\overline{C}_j$ در جدول نهایی آن را در جدول به هنگام نمایید و به گام ۳ بروید.

قدم سوم: با توجه به وجود مقدار منفی در سطر Z جدول به هنگام شده، حل مسئله را به روش سیمپلکس ادامه می دهیم.

مثال: اگر ضریب متغیر $X_۲$ در تابع هدف به ۵۰- تغییر یابد، حل بهینهٔ جدید را بیابید.

«با توجه به مثال صفحهٔ قبل»

منفی شد لذا از سیمپلکس ادامه می دهیم

ادامهٔ جدول

Z	۰	$\frac{۷۰}{۳}$	$\frac{-۱۰}{۳}$	۰	$\frac{-۴۴}{۱۵}$	-۴۱۵	$-۱۸۶۶/۷$
$X_۲$	$\frac{۳}{۷}$	۱	$\frac{۵}{۷}$	۱	$\frac{۴}{۳۵}$	$\frac{-۱}{۳۵}$	۵۷۱/۲
$X_۴$	$\frac{۱}{۷۰}$	۰	$\frac{۲}{۳۵}$	۰	$\frac{-۱}{۳۵۰}$	$\frac{۹}{۳۵}$	۸۵/۶
Z	-۱۰	۰	-۲۰	۰	$-۵/۶$	$\frac{۲}{۵}$	-۳۲۰۰
$X_۱$	$\frac{۴}{۹}$	۱	$\frac{۷}{۹}$	$\frac{۱۰}{۹}$	$\frac{۱}{۹}$	۰	۶۶۶/۷
$S_۲$	$\frac{۵}{۹}$	۰	$\frac{۲۰}{۹}$	$\frac{۳۵۰}{۹}$	$\frac{-۱}{۹}$	۱	۳۳۳۳/۳
Z	$\frac{-۹۲}{۹}$	۰	$\frac{-۱۸۸}{۹}$	$\frac{-۱۴۰}{۹}$	$\frac{-۵۰}{۹}$	۰	$-۳۳۳۳۳/۳$

۳. ((متغیردر مقادیر ضاریب متغیرهای اساسی در تابع هدف))

گام اول: با استفاده از رابطهٔ $\overline{C}_j = C_j - C_B B^{-۱} a_j$ تمامی مقادیر $\overline{C}_j$ ها را برای متغیرهای غیر اساسی بیابید.

گام دوم: چنانچه تمامی $\overline{C}_j$ ها غیر منفی بودند، حل نهایی فعلی کماکان بهینه بوده (در صورت Maxسازی) و مقادیر متغیرهای اساسی بدون تغیر باقی می مانند، لیکن مقدار تابع

هدف تغییر می کند که می بایست از رابطهٔ $Z = C_B B^{-۱} b$ محاسبه گردد، در غیر این صورت پس از محاسبهٔ مقدار Z و $\overline{C}_j$ ها به گام بعدی می رویم.

گام سوم: با توجه به وجود مقدار منفی در سطر Z حل مسئله را به صورت سیمپلکس ادامه می دهیم.

مثال: اگر در یک تابع متغیر $X_۱$ در تابع هدف به ۹- تغییریابد، حل جدید را بیابید.

«با توجه به مثال اصلی»

$$\overline{C}_۲ = C_۲ - C_B B^{-۱} a_۲ = -۲۰ - \begin{bmatrix} -۹ & -۴۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۴}{۱۵} & \frac{-۱}{۱۵} \\ \frac{-۱}{۱۵۰} & \frac{۲}{۷۵} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۹ \\ ۱ \end{bmatrix} = \frac{-۱}{۳}$$

$$\overline{C}_۳ = -۱/۶۷ \qquad \overline{C}_{S_۱} = \frac{۳۲}{۱۵}$$

$$\overline{C}_{S_۲} = \frac{۷}{۱۵} \qquad Z = C_B B^{-۱} b = -۱۴۶۶۶/۶۷$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	RHS
$X_۱$	۱	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	۰	$\frac{۴}{۱۵}$	$\frac{-۱}{۱۵}$	۱۳۳۳/۳
$X_۴$	۰	$\frac{-۱}{۳۰}$	$\frac{۱}{۳۰}$	۱	$\frac{-۱}{۱۵}$	$\frac{۲}{۷۵}$	۶۶/۶۷
Z	۰	$\frac{۱}{۳}$	۱/٦٧-	۰	$\frac{-۳۲}{۱۵}$	$\frac{۷}{۱۵}$	۱۴۶۶۶/۶۷-
$X_۳$	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۷}{۵}$	۱	۰	$\frac{۴}{۲۵}$	$\frac{-۱}{۱۵}$	۸۰۰
$X_۴$	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{-۲}{۵}$	۰	۱	$\frac{-۳}{۲۵}$	$\frac{۷}{۲۵}$	

٤. ((تغییر در مقادیر ضرایب متغیرهای غیراساسی د رمحدودیت های (a_j)))

قدم اول: با استفاده از رابطهٔ $\bar{C}_j = C_j - C_B B^{-۱} a_j$ مقدار $\bar{C}_j$ را بر متغیر مورد نظر بیابیم.

قدم اول: چنانچه $\bar{C}_j$ به دست آمده غیر منفی باشد، حل نهایی فعلی کماکان بهینه بوده و مقادیر متغیرهای اساسی بدون تغییر باقی می مانند، در غیر این صورت به گام بعدی بروید.

قدم سوم: با استفاده از رابطهٔ $B^{-۱} a_j = \bar{a}_j$ بردار $\bar{a}_j$ را برای این متغیر مورد نظر به دست آورید.

قدم چهارم: با قرار دادن بردارهای $\bar{C}_j$ و $\bar{a}_j$؟ در جدول نهایی را به هنگام کنید.

قدم پنجم: با توجه به وجود مقدار منفی در سطر Z جدول به هنگام شده، حل مسئله را به روش سیمپلکس ادامه دهید.

مثال: اگر ضریب متغیر $X_۲$ در محدودیت اول به ٦ کاهش یابد، حل بهینهٔ جدید را بیابید.

$$\bar{a}_۲ = B^{-۱} a_۲ = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۱۵} & \frac{-۱}{۱۵} \\ \frac{-۱}{۱۵} & \frac{۲}{۷۵} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۶ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۲۳}{۱۵} \\ \frac{-۲}{۱۵} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_۲ = C_۲ - C_B \bar{a}_۲ = -۲۰ - \begin{bmatrix} -۱۲ & -۴۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۲۳}{۱۵} \\ \frac{-۲}{۱۵} \end{bmatrix} = -۲/۱$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	RHS
$X_۱$	۱	$\frac{۲۳}{۱۵}$	$\frac{۵}{۳}$	0	$\frac{۴}{۱۵}$	$\frac{-۱}{۱۵}$	۱۳۳۳/۳
$X_۴$	0	$\frac{-۲}{۱۵۰}$	$\frac{۱}{۳۰}$	۱	$\frac{-۱}{۱۵۰}$	$\frac{۲}{۷۵}$	۶۶/۷
Z	0	$\frac{۳۲}{۱۵}$	$\frac{-۱۰}{۳}$	0	$\frac{-۴۴}{۱۵}$	$\frac{-۴}{۱۵}$	−۱۸۶۶۶/۶۷

X_2	$\frac{۱۵}{۲۳}$	۱	$\frac{۲۵}{۱۳}$	0	$\frac{۴۴}{۲۳}$	$\frac{-۱}{۲۳}$	۸۶۹/۴
X_4	$\frac{۱}{۱۱۵}$	0	$\frac{۱۱}{۲۳۰}$	۱	$\frac{-۱}{۲۳۰}$	$\frac{۳}{۱۱۵}$	۷۸/۳
Z	-۳۲	0	$\frac{-۱۳۰}{۲۳}$	0	$\frac{-۷۶}{۲۳}$	$\frac{-۴}{۲۳}$	-۲۰۵۲۱/۸

۵. ((متغیر در مقادیر ضرایب متغیرهای اساسی در محدودیت ها))

باید مسئله را از ابتدا حل کنیم، چون وقتی B تغییر کند، همه تغییر می کند . از تحلیل حساسیت استفاده نمی کنیم.

٦. ((اضافه کردن متغیر جدید به مسئلهٔ y))

این عمل مشابه آن است که فرض کنیم که ضریب متغیر (غیر اساسی y) در تابع هدف (C_y) و مقادیر ضرایب متغیر غیر اساسی y در محدودیت ها (a_y) از صفر به مقادیر داده شده تغییر کند.

قدم اول: با استفاده از رابطهٔ $\bar{C}_y = C_y - C_B B^{-1} a_y$ مقدار $\bar{C}_y$ را می یابیم.

قدم اول: چنانچه $\bar{C}_y$ به دست آمده غیر منفی بود، حل نهایی فعلی کماکان بهینه بوده و مقادیر متغیرهای اساسی نیز بدون تغییر باقی می مانند، در غیر این صورت به قدم ۳ بروید.

قدم سوم: با استفاده از رابطهٔ $\bar{a}_y = B^{-1} a_y$ را برای متغیر جدید می یابیم.

قدم چهارم: با اضافه کردن ستون در جدول نهایی برای متغیر جدید و قرار دادن مقدار $\bar{C}_y$ و بردار $\bar{a}_y$ در جدول نهایی آن را به هنگام نماییم.

قدم پنجم: با توجه به وجود مقدار منفی در سطر Z جدول به هنگام شده، حل مسئله را با ورود متغیر جدید به جمع متغیرهای اساسی به روش سیمپلکس ادامه دهید.

مثال: فرض کنید در مسئله فعالیت جدیدی به صورت $y>0$ معرفی نماییم که ضریب آن در تابع هدف ۱۸- در محدودیت اول ۵ و در محدودیت دوم ۲ باشد، در این صورت حل بهینهٔ جدید چه خواهد بود.

$$\overline{C}_y = C_y - C_B B^{-۱} a_y = -۱۸ - \begin{bmatrix} -۱۲ & -۴۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{۶}{۵} \\ \frac{۱}{۱۵۰} \end{bmatrix} = -۲/۸$$

$$\bar{a}_y = B^{-۱} a_y = \begin{bmatrix} \frac{۴}{۱۵} & \frac{-۱}{۱۵} \\ \frac{-۱}{۱۵} & \frac{۲}{۷۵} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۶}{۵} \\ \frac{۱}{۱۵} \end{bmatrix}$$

	X1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	y	RHS
$X_۱$	۱	$\frac{۲۳}{۱۵}$	$\frac{۵}{۳}$	0	$\frac{۴}{۵}$	$\frac{-۱}{۱۵}$	$\frac{۶}{۵}$	۱۳۳۳ / ۳ ۶۶۶۷
$X_۲$	0	$\frac{-۲}{۱۵۰}$	$\frac{۱}{۳۰}$	۱	$\frac{-۱}{۱۵}$	$\frac{۲}{۷۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	
Z	0	$\frac{۲۰}{۳}$	$\frac{-۱۰}{۳}$	0	$\frac{-۴۴}{۱۵}$	$\frac{-۴}{۱۵}$	$\frac{۲}{۸}$	−۱۸۶۶۶ / ۶۷
y	$\frac{۵}{۶}$	$\frac{۳۵}{۱۸}$	$\frac{۲۸}{۱۸}$	0	۱	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{-۱}{۱۸}$	۱۱۱۱ / ۱
$X_۴$	$\frac{-۱}{۶۰}$	$\frac{-۱۳}{۱۸۰}$	$\frac{۱}{۱۸۰}$	۱	0	$\frac{-۱}{۹۰}$	$\frac{۱}{۳۶}$	۴۴ / ۴
Z	$\frac{-۷}{۳}$	$\frac{-۱۰۹}{۹}$	$\frac{-۶۵}{۹}$	0	0	$\frac{-۴۲}{۹}$	$\frac{-۱}{۹}$	−۲۱۷۷۷ / ۸

۷.((اضافه کردن محدودیت جدید به مسئله))

گام اول : مقادیر به دست آمده برای متغیرها را از جدول نهایی استخراج کرده و در محدودیت جدید قرار دهید، چنانچه این مقادیر در محدودیت جدید صدق کرد، حل نهایی فعلی کماکان بهینه بوده و مقادیر متغیرهای اساسی نیز بودن تغییر باقی می ماند، در غیر این صورت به گام ۲ بروید.

گام دوم: چنانچه محدودیت جدید به صورت بزرگتر مساوی باشد، با خوب کردن طرفین نامساوی در ۱- آن را به صورت کوچکتر مساوی در آورید.

گام سوم: با اضافه کردن متغیر کمکی (خفیف) S_i (i: شمارهٔ محدودیت است) به سمت چپ محدودیت جدید کوچکتر مساوی آن را به صورت تساوی در آورید.

گام چهارم: با اضافه کردن ستون در جدول نهایی برای متغیر کمکی جدید و اضافه کردن سطری برای محدودیت جدید با متغیر اساسی S_i محدودیت تساوی حاصل از قدم ۳ را عیناً به جدول نهایی بیفزایید.

گام پنجم: توسط عملیات سطری ماتریس ها ضریب متغیرهای اساسی در سطر جدی د را صفر کنید.

گام ششم: توسط الگوریتم سیمپلکس مزودج حل را ادامه دهید.

مثال: چنانچه به محدودیت های مسئله محدودیت زیر اضافه گردد، حل بهینه چه خواهد بود؟

$$X_۱ + \frac{۱۰۱}{۳۰}X_۲ + ۱۹X_۳ - X_۴ \le ۱۶۶۶/۶۷$$

اگر صدق کند، محدودیت فوق زائد، ولی اگر صدق نکند، باید محدودیت را اعمال کنیم.

$$\begin{cases} X_۱ = ۱۳۳۳۳ / ۳ \\ X_۲ = ۶۶ / ۶۷ \end{cases}$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	RHS
$X_۱$	۱	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	0	$\frac{۴}{۱۵}$	$\frac{-۱}{۱۵}$	0	۱۳۳۳ / ۳
$X_۴$	0	$\frac{-۱}{۳۰}$	$\frac{۱}{۳۰}$	۱	$\frac{-۱}{۱۵۰}$	$\frac{+۲}{۷۵}$	0	۶۶ / ۶۷
$S_۵$	0	۱	−۱	0	$\frac{-۴۱}{۱۵۰}$	$\frac{۷}{۷۵}$	۱	−۱۰۰
Z	0	$\frac{-۲۰}{۳}$	$\frac{-۱۰}{۳}$	0	$\frac{۴۴}{۱۵}$	$\frac{-۴}{۱۵}$	0	−۱۸۶۶۶ / ۶۷
$X_۱$								۱۱۶۶ / ۷
$X_۴$								۶۳ / ۳
$X_۳$								۱۰۰۰
Z								−۱۸۶۶۶ / ۶۷

حمل و نقل

فرض کنید M مبدأ و N مقصد موجوداند . S_i تعداد واحدهای قابل عرضه در مبدأ i و $i = ۱,...,m$ و d_j را تعداد واحدهای مورد تقاضا در مقصد j و C_{ij} ضرایب هزینهٔ حمل یک کالا از مبدأ i به مقصد j می نامیم.

هدف تعیین تعداد واحدهایی است که باید از مبدأ i به مقصد j حمل شود تا هزینهٔ حمل و نقل کمینه شود.

$X_{ij} =$ تعداد واحدهای حل شده از مبدأ i به مقصد jام

اطلاعات کلی مدل حمل ونقل به صورت جدول زیر داده می شود.

C_{ij}: هزینهٔ حمل و نقل یک واحد کالا از مبدأ i به مقصد j

مقصد / مبدأ	۱	۲	...	n	عرضه
۱	$C_{۱۱}$	$C_{۱۲}$	...	$C_{۱n}$	S_1
۲	$C_{۲۱}$	$C_{۲۲}$	...	$C_{۲n}$	S_2
	⋮	⋮		⋮	
m	$C_{m۱}$	$C_{m۲}$	...	C_{mn}	S_m
تقاضا	$d_۱$	$d_۲$	...	d_n	$\sum S_i$ $\sum d_j$

$$\text{MinZ} = C_{۱۱}X_{۱۱} + C_{۱۲}X_{۱۲} + \ldots + C_{۱n}X_{۱n} + \ldots + C_{mn} + X_{mn}$$

S.t:

$$\text{عرضه}\begin{cases} X_{۱۱} + X_{۱۲} + \ldots + X_{۱n} \\ \vdots \\ X_{۲۱} + \ldots + X_{۲n} \\ \vdots \\ X_{m۱} + \ldots + X_{mn} \leq Z_m \end{cases}$$

$$\text{تقاضا}\begin{cases} X_{۱۱} + X_{۲۱} \ldots + X_{m۱} \geq d_۱ \\ X_{۱۲} + X_{۲۲} \quad X_{m۲} \geq x_۲ \\ \vdots \qquad \vdots \\ X_{۱n} + X_{۲n} \cdots X_{mn} \geq d_n \end{cases}$$

$X_{ij} \geq ۰$

$i = ۱,\ldots,m$

$j = ۱,\ldots,n$

فرض اولیه در یک مدل حمل و نقل برابری عرضهٔ کل با تقاضای کل است، یعنی:

$$\sum_{i=۱}^{m} S_i = \sum_{j=۱}^{n} d_j$$

در این صورت مدل به صورت زیر در خواهد آمد.

$$\text{MinZ} = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

S.t:

$$\sum_{j=۱}^{n} X_{ij} = S_i \qquad i = ۱,\ldots,n$$

$$\sum_{i=۱}^{m} X_{ij} = S_i \qquad j = ۱,\ldots,n$$

$$X_{ij} \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad i = ۱,\ldots,m$$

$$j = ۱,\ldots,n$$

و اگر $\sum_{j=۱}^{n} d_j = \sum_{i=۱}^{m} S_i$ باشد:

با قرار دادن یک مبدأ یا یک مقصد مجازی $\left|\sum_{i=۱}^{m} S_i = \sum_{j=۱}^{n} d_j\right|$

با ظرفیت و هزینهٔ صفر این مشکل را حل می کنیم.

تعریف کلی مدل حمل و نقل ایجاب می کند که $\sum S_i = \sum d_j$ باشد و این شرط باعث می شود که یک معالهٔ وابسته به m+n دیگر باشد، لذا مدل حمل و نقل دارای ۱ -m+n معادلهٔ مستقل است.

جواب اساسی موجه آغازین

برای به دست آوردن آن معمول ترین روش عبارتند از:

۱. روش گوشهٔ شمال غربی ۲. به روش کمترین هزینه ۳. روش می نیم سطر (یا ستون) ٤. روش وگل

۱. روش گوشهٔ شمال غرب

در این روش از سمت گوشهٔ شمال غرب شروع کرده و قدم های زیر را بردارید:

الف) از خانهٔ شمال غربی جدول شروع کرده و به این خانه مقدار کمتر ستون عرضه و یا سطر تقاضا را (اختصاص) بعد از اختصاص مقادیر جدید مورد نیاز تقاضا و مقدار عرضه را با کسر این مقدار اختصاص داده شده از مقادیر عرضه و تقاضای مربوطه به این خانه به دست آورید.

ب) اگر مقدار جدید تقاضا برای یک ستون صفر گردد، به خانهٔ سمت راست کنار آن حرکت کنید و اگر مقدار جدید عرضه برای یک سطر صفر گردد به خانهٔ پایین آن حرکت می کنیم و اگر مقدار سطر و ستون هر دو با هم صفر باشد، در خانهٔ سمت راستی یا پایینی (نه هر دو) صفر قرار دهید و به خانهٔ پایینی یا سمت راستی حرکت کنید.

ج) به خانهٔ جدید طبق گام ۲ تا آن جا که ممکن است مقداری را اختصاص دهید و مقادیر جدید عرضه و تقاضا برای سطر و ستون را بیابید.

د) قدم دوم و سوم را تکرار کنید تا به یک جواب اساسی موجه ابتدایی برسیم.

مقصد / مبدأ	A	B	C		عرضه
۱	۱۵ ۳۶۰	۱۲ ۴۰	۲۴	~~۶۰۰~~	~~۴۰~~ ۰
۲	۷	۸ ۲۶۰	۱۵ ۴۰	~~۳۰۰~~	~~۴۰~~ ۰
۳	۲۷	۱۸	۲۱ ۱۰۰	~~۱۰۰~~	۰
تقاضا	۳۶۰	~~۳۰۰~~	~~۱۴۰~~	۸۰۰	
		~~۲۶۰~~	~~۱۰۰~~		
			۰	۰	

$X_{۱A}=۳۶۰$ $X_{۱B}=۱۰$ $X_{۲B}=۲۶۰$

$X_{۲C}=۴۰$ $X_{۳C}=۱۰۰$

$X_{۱C}=X_{۲A}$ $X_{۳A}=X_{۳B}=۰$

«دوگان مسئلهٔ حمل و نقل»

اگر u_i را متغیر دوگان متناظر قیود مبدأ $i = 1,...,m$ و V_j متغیرهای دوگان متناظر قیود به مقصد $j = 1,...,n$ در نظر بگیریم، دوگان مسئلهٔ حمل و نقل به صورت زیر است:

$$Max \sum_{i=1}^{m} S_i U_i + \sum_{i=1}^{n} d_j V_j$$

S.t:

$$U_i + V_j \le C_{ij}$$

U_i , V_j نامقید (آزاد)

مسیر پله سنگ

مشخصات این مسیر به شرح زیر است:

الف) مسیری است بسته و منحصر به فرد که دارای اضلاع عمود برهم می باشد

ب) یکی از گوشه های مسیر در خانهٔ خالی انتخابی و سایر گوشه های آن باید در خانه های پر (متغیر اساسی) واقع گردد.

ج) به گوشه ای که در خانهٔ خالی قرار دارد، علامت + و به بقیهٔ خانه ها یکی در میان منفی و مثبت می دهیم.

روش توزیع تعدیل شده:

در این روش یک ضریب U_i و یک ضریب V_j برای ستون ها تعریف می کنیم. مقدار U_i و V_j را برای هر متغیر اساسی با استفاده از $U_i + V_j = C_{ij}$ به دست می آوریم.

چون مسئله دارای m+n-1 معادلهٔ m+n مجهول می باشد، بطور اختیاری یکی از مقایر U_i و V_j را صفر می دهید . به ارزیابی متغیر غیر اساسی می پردازیم $C_{ij} - (U_i + V_j)$. اگر

$C_{ij}-\left(U_i+V_j\right)\geq ۰$، برای کلیهٔ متغیر های غیر اساسی برقرار بود، بهینه است، ولی اگر کوچکتر از صفر باشد، غیر بهینه است.

مثال: در یک مسئلهٔ حمل ونقل جواب اولیهٔ مسئله به صورت زیر ارائه شده است، جواب بهینه را بیابید.

۸	٦	۱۰	۹	$U_۱=۰$
۱۰+۶ ۱ ۲۰ ۱۰+۶	۱۳ ۲۰ ۲۰−۶	۱۳ ۲۰ ۲۰−۶	۷	$U_۲=۱$
۱٤	۹	۱٦ ۱۰	۵ ۳۰	$U_۳=۴$
$V_۱=۸$	$V_۲=۱۱$	$V_۳=۱۲$	$V_۴=۱$	

$$\Rightarrow C_{۳۱}-\left(U_۳+V_۱\right)=۱۴-\left(۴+۸\right)=۲>۰$$

$$C_{۱۲}-\left(U_۱+V_۲\right)=۶-(۱۱)=-۵$$

$$\begin{cases} ۳۵-\theta=۰ \\ ۲۰-\theta=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta=۳۵ \\ \theta_۲=۲۰ \end{cases} \Rightarrow \theta=\text{Min}\left(\theta_۱,\theta_۲\right)=۲۰$$

سؤال امتحان: C_{ij} چقدر تغییر کند که جدول بهینه بماند . در خانهٔ دوم ٦+٥ می گذاریم و پارامتری حل می کنیم.