



موسسه آموزش عالی آزاد

## کنترل کیفیت آماری

جزوه ۲۵٪ سوم

ویرایش اول

تالیف:

دکتر احمد گائینی

آذر ۸۹

## فصل سوم

### نمودارهای کنترل برای وصفی‌ها

می‌دانیم اگر متغیری قابل اندازه‌گیری نباشد به آن کیفی می‌گویند یکی از روش‌های ارزیابی متغیرهای کیفی تقسیم آن‌ها به دو بخش مطلوب و نا مطلوب (پیروزی و شکست) می‌باشد. در آمار توزیع‌های برنولی و دوجمله‌ای و پواسون و هندسی از توزیع‌هایی هستند که در مورد این متغیرها موضوعاتی را مطرح می‌کنند. معمولاً برای این متغیرها نسبت پیروزی‌ها یا تعداد پیروزی‌ها به عنوان شاخص شناخته می‌شوند به عنوان مثال تعداد قطعات معیوب - نسبت کالاهای خارج از استاندارد از این نوع متغیرها هستند.

#### ۱- نمودار کنترل برای نسبت اقلام معیوب (P)

می‌دانیم اگر در یک جامعه برنولی معیوب بودن به عنوان پیروزی قلمداد شود  $p$ ، احتمال معیوب بودن برابر نسبت اقلام معیوب جامعه به تعداد کل اقلام جامعه می‌باشد. لازم به ذکر است این‌که معیوب بودن یا سالم بودن را پیروزی در نظر بگیریم و نسبت آن را بررسی کنیم کاملاً قراردادی است و با بررسی یکی، دیگری مشخص می‌شود.

فرض کنید یک نمونه  $n$  تایی از این جامعه برنولی با پارامتر  $p$  گرفته شود یعنی  $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d}{\sim} b(p)$

می‌دانیم بهترین برآورد  $p$  را به صورت  $\hat{p} = \frac{X}{n}$  تعریف می‌کنیم که  $X$  تعداد پیروزی (معیوب) در نمونه  $n$  تایی است.

به  $\hat{p}$  نسبت اقلام معیوب نمونه می‌گوییم.

می‌دانیم  $X \sim b(n, p)$  یعنی  $X$  دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای  $n$  و  $p$  می‌باشد. و

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p) = npq$$

در نتیجه

$$E(\hat{p}) = \frac{np}{n} = p, \quad \text{Var}(\hat{p}) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

حال اگر  $p$  معلوم باشد می‌توانیم خط مرکزی و حدود کنترل نمودار  $p$  را به صورت زیر بنویسیم.

$$C.L = p = E(\hat{p})$$

$$UCL = E(\hat{p}) + k\sqrt{\text{Var}(\hat{p})} = p + k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$LCL = E(\hat{p}) - k\sqrt{\text{Var}(\hat{p})} = p - k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

که در آن  $k$  فاصله خط مرکزی از حدود کنترل است و معمولاً برابر 3 در نظر گرفته می‌شود. به عبارت دیگر خط مرکزی و حدود کنترل نمودار  $p$  عبارتند از:

$$CL = p$$

$$UCL = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$LCL = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

پس از رسم این نمودار بایستی  $m$  بار نمونه  $n$  تایی بگیریم و در هر نمونه نسبت اقلام نمونه را به صورت  $\hat{p}_i = \frac{X_i}{n}$  برای  $i = 1, 2, \dots, m$  پیدا کنیم و هر یک از  $\hat{p}_i$  را به عنوان نقطه‌ای در نمودار بالا رسم کنیم هر نقطه‌ای خارج از حدود کنترل بوده وجود خطای با دلیل در آن نقطه بررسی می‌شود و اگر همه نقاط در حدود کنترل باشند و نقاط رسم شده از روند منظم غیر تصادفی برخوردار نباشند فرآیند را تحت کنترل می‌دانیم.

بدیهی است اگر  $p$  را ندانیم بایستی آن را برآورد کنیم. بهترین برآورد  $p$  در این شرایط عبارت است از:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{mn}$$

پس از محاسبه  $\bar{p}$  است در حدود کنترل  $p$  که قبلاً یافته‌ایم به جای  $p$  از  $\bar{p}$  استفاده کنیم بنابراین حدود کنترل آزمایشی مورد نظر عبارتند از:

$$CL = \bar{p}$$

$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

لازم به ذکر است اگر  $LCL$  منفی شد به دلیل آن که  $p$  بایستی مثبت باشد و  $LCL$  را برابر صفر می‌گیریم. این مطلب را برای نمودار قبلی هم رعایت می‌کنیم.

**مثال:** اعداد زیر تعداد اقلام معیوب را در  $m = 25$  روز نمونه‌گیری  $n = 300$  تایی از خط تولید یک کارخانه نشان می‌دهد. حدود کنترل آزمایشی را محاسبه و نقاط خارج از کنترل را مورد بررسی قرار دهید.

شماره نمونه	$X_i$	$\hat{p}_i$
۱	12	0.04
۲	3	0.01
۳	9	0.03
۴	4	0.013
۵	0	0

شماره نمونه	$X_i$	$\hat{p}_i$
۱۶	5	0.017
۱۷	7	0.021
۱۸	8	0.026
۱۹	16	0.053
۲۰	2	0.007

۶	6	0.02	۲۱	5	0.017
۷	6	0.02	۲۲	6	0.02
۸	1	0.003	۲۳	0	0
۹	8	0.026	۲۴	3	0.01
۱۰	11	0.036	۲۵	2	0.006
۱۱	2	0.007	جمع	$\sum X_i = 138$	-
۱۲	10	0.033			
۱۳	9	0.03			
۱۴	3	0.01			
۱۵	0	0			

$$\bar{p} = \frac{\sum X_i}{mn} = \frac{138}{25(300)} = \frac{138}{7500} = 0.018$$

$$CL = \bar{p} = 0.018$$

$$UCL_p = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.018 + 3\sqrt{\frac{(0.018)(0.982)}{300}} = 0.041$$

$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.018 - 3\sqrt{\frac{(0.018)(0.982)}{300}} = -0.005$$

که بایستی قرار دهیم  $LCL = 0$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود زیر گروه شماره 19 دارای مقداری برای  $\hat{p}$  است که بالاتر از  $UCL_p$  می‌باشد. با حذف این نمونه مجدداً حدود را حساب می‌کنیم.

$$\bar{p}_{new} = \frac{122}{7200} = 0.017$$

$$UCL_p = \bar{p}_{new} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}_{new}(1-\bar{p}_{new})}{n}} = 0.017 + 3\sqrt{\frac{(0.017)(0.983)}{300}} = 0.039$$

$$LCL_p = \bar{p}_{new} - 3\sqrt{\frac{(0.017)(0.983)}{300}} = -0.005$$

که  $LCL_p$  را صفر قرار می‌دهیم.

حال با این حدود کنترل همه نقاط داخل محدوده هستند.

**تذکر:** اگر تعداد نمونه زیر گروه‌ها برابر نباشد خط مرکزی عبارت است از:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i \hat{p}_i}{\sum_{i=1}^m n_i}$$

که  $n_i$  تعداد نمونه زیر گروه  $i$  ام و  $\hat{p}_i = \frac{X_i}{n_i}$  برآورد نسبت معیوب‌ها در زیر گروه  $i$  ام می‌باشد.

حدود کنترل برای هر زیر گروه جداگانه حساب می‌شود.

$$UCL_i = \bar{p} + 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}$$

$$LCL_i = \bar{p} - 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}$$

لازم به ذکر است می‌توان این حدود را به سادگی حساب کرد چون تنها عامل متفاوت آن‌ها  $\sqrt{n_i}$  در مخرج کسر می‌باشد.

نمودار زیر می‌تواند یک نوع از این زیرگروه‌ها را نشان دهد.

زیرگروه	$n_i$	$\hat{p}_i$
۱	180	0.15
۲	120	0.15
۳	142	0.14
۴	315	0.16
۵	162	0.14

**تذکر:** با توجه به آن‌که نموداری که با اندازه  $n_i$  های متفاوت رسم می‌شود از پیچیدگی برخوردار است و در بررسی و ارائه نتایج مشکلاتی به همراه دارد یکی از روش‌های رفع این مشکل این است که میانگین تعداد نمونه‌ها را برای زیرگروه‌ها و حدود کنترل در نظر بگیریم یعنی به جای  $n$  در روابط مربوط به حدود کنترل از

$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i}{m}$$

استفاده کنیم.

**نکته:** فرمول تعداد نمونه زیرگروه‌ها

می‌دانیم تعداد نمونه لازم برای آن‌که در سطح اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  حداکثر خطای برآورد  $\hat{p}$  برابر  $e$  بشود عبارت است از:

$$n = \hat{p}\hat{q} \left( \frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}}{e} \right)^2$$

در بحث ما با توجه به آن‌که  $Z_{\frac{\alpha}{2}} = K = 3$  در نظر گرفته می‌شود و میزان تغییرات  $e = \hat{p} - p$  می‌باشد می‌توانیم بنویسیم.

$$n = pq \left( \frac{k}{e} \right)^2$$

که در آن  $k$  نشان‌دهنده استفاده از حدود  $k$  انحراف معیار  $e$  میزان تفاوت  $p$  از مقدار جدید آن می‌باشد و  $q = 1 - p$ . در این حالت وقتی  $\hat{p} \approx N(np, npq)$  و نسبت معیوب در فرآیند خارج از کنترل  $p = UCL$  در نظر گرفته شود احتمال  $\hat{p} > UCL$  برابر 0.5 می‌شود.

به عنوان یک روش دیگر می‌توانیم  $n$  را طوری پیدا کنیم که  $LCL > 0$  یعنی

$$p - k \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} > 0$$

$$n > \frac{1-p}{p} K^2$$

**مثال:** می‌خواهیم با حدود کنترل 3 انحراف معیار تعداد نمونه را طوری پیدا کنیم که وقتی  $p = 0.054$  داشته با  $LCL > 0$  چه تعداد نمونه لازم است؟

$$n > \frac{1-p}{p} K^2 = \frac{0.96}{0.04} p(3)^2 = 24(9) = 216$$

**حل:**

پس باید  $n \geq 217$  نمونه در هر زیر گروه داشته باشیم.

**تذکر:** لازم به ذکر است وقتی  $p$  کوچک است بدیهی است در تعداد نمونه کم نمی‌توان معیوب مشاهده کرد یعنی باید وقتی  $p$  کوچک است آنقدر نمونه بگیریم که معیوبی را هم مشاهده نماییم.

## ۲- نمودار کنترل تعداد اقلام معیوب

بعضی مواقع لازم است به جای پرداختن به نسبت اقلام معیوب تعداد اقلام معیوب را مورد بررسی قرار دهیم. نمودار مربوط به تعداد اقلام معیوب را  $np$  هم می‌گویند. برای یافتن روابط مربوط به این نمودار کافی است در روابط نمودار  $P$  عدد  $n$  را ضرب کنیم در این حال

$$CL_{np} = np$$

$$UCL_{np} = np + 3\sqrt{np(1-p)}$$

$$LCL_{np} = np - 3\sqrt{np(1-p)}$$

اگر  $p$  که نسبت اقلام معیوب جامعه است نامعلوم باشد. به جای آن از  $\bar{P} = \frac{\sum_{i=1}^m \hat{p}_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{mn}$  استفاده می‌کنیم.

## ۳- نمودار کنترل برای تعداد نقص‌ها

کالای معیوب ممکن است دارای چندین اشکال جزئی باشد که آن‌ها را نقص می‌گوییم. نمودار قبلی تعداد اقلام و نسبت اقلام معیوب را در نظر می‌گرفت در حالی که ممکن است حتی کالای سالم دارای نقص جزئی باشد.

در این نمودار می‌خواهیم تعداد نقص‌ها را در نظر بگیریم. به عنوان مثال وجود خش در رنگ بدنه یک یخچال نقص حساب می‌شود. فرض کنید تعداد نقص‌ها در واحد مورد بررسی دارای توزیع پواسون باشد. واحد مورد بررسی می‌تواند یک زمان تولید - سطح یا حجم یک کالا یا چند کالا با هم باشد. می‌دانیم تابع احتمال تعداد نقص‌ها در واحد مورد بررسی عبارت است از:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

که در آن  $\lambda > 0$  با فرض معلوم بودن  $\lambda$  بدیهی است خط مرکزی و حدود کنترل به انحراف معیار عبارتند از:

$$CL = \lambda$$

$$UCL = \lambda + 3\sqrt{\lambda}$$

$$LCL = \lambda - 3\sqrt{\lambda}$$

با توجه به آن که تعداد نقص‌ها نمی‌تواند منفی باشد وقتی  $LCL < 0$  آن را صفر در نظر می‌گیریم.

اگر  $\lambda$  معلوم نباشد یا مقدار استاندارد برای آن وجود نداشته باشد آن را با میانگین تعداد نقص‌ها در نمونه  $m$  تایی یعنی با

$$\bar{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{m}$$

برآورد می‌کنیم لذا حدود کنترل آزمایشی و خط مرکزی عبارتند از:

$$CL = \bar{\lambda}$$

$$UCL = \bar{\lambda} + 3\sqrt{\bar{\lambda}}$$

$$LCL = \bar{\lambda} - 3\sqrt{\bar{\lambda}}$$

**مثال:** فرض کنید اعداد زیر تعداد زنگ‌های موجود در یک توپ پارچه را در 25 نمونه نشان می‌دهد

شماره نمونه	تعداد زدگی	شماره نمونه	تعداد زدگی	شماره نمونه	تعداد زدگی
1	7	11	14	21	0
2	6	12	3	22	4
3	6	13	1	23	14
4	3	14	3	24	4
5	22	15	2	25	3
6	8	16	7	جمع	141
7	6	17	5		
8	1	18	7		
9	0	19	2		
10	5	20	8		

$$\bar{\lambda} = \frac{141}{25} = 5.64$$

$$UCL = 5.64 + 3\sqrt{5.64} = 12.76$$

$$LCL = 5.64 - 3\sqrt{5.64} < 0$$

پس  $LCL = 0$

همان‌طور که مشهود است نمونه‌های شماره ۵ و ۱۱ و ۲۳ دارای تعداد نقص بیشتر از  $UCL$  هستند و باید حذف شوند پس از حذف آن‌ها حدود کنترل را مجدداً پیدا می‌کنیم.

$$\bar{\lambda}_{\text{new}} = \frac{141 - (22 + 14 + 14)}{25 - 3} = 4.136$$

$$UCL_{\text{new}} = 4.136 + 3\sqrt{4.136} = 10.237$$

$$LCL_{\text{new}} = 4.136 - 3\sqrt{4.136} < 0$$

که  $LCL_{\text{new}} = 0$

بنابراین در روابط اصلاح شده همه نمونه‌ها داخل حدود کنترل قرار دارند.

#### ۴- نمودار متوسط تعداد نقص‌ها (نمودار U)

فرض می‌کنیم در هر بار نمونه‌گیری  $n$  واحد نمونه به عنوان زیرگروه در نظر می‌گیریم و  $\lambda$  تعداد کل نقص‌ها در زیر گروه باشد پس

$$U = \frac{\lambda}{n}$$

متوسط تعداد نقص در هر واحد مورد بررسی است و بنابراین خط مرکزی و حدود کنترل آزمایشی عبارتند از:

$$CL = \bar{U}$$

$$UCL = \bar{U} + 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$$

$$LCL = \bar{U} - 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$$

که در آن  $\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^m U_i}{m}$  متوسط تعداد نقض‌ها در هر واحد برای کل نمونه‌هاست.

**مثال:** اعداد زیر تعداد اشکال‌های جزئی در رنگ بدنه یخچال‌ها را نشان می‌دهد. 2 بار نمونه‌گیری شده و در هر بار 5 یخچال را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

شماره نمونه	تعداد اشکال	متوسط تعداد اشکال	شماره نمونه	تعداد اشکال	متوسط تعداد اشکال
1	7	1.4	11	11	2.2
2	12	2.4	12	3	0.6
3	11	2.2	13	7	1.4
4	13	2.6	14	10	2
5	11	2.2	15	10	2
6	16	3.2	16	8	1.6
7	10	2	17	8	1.6
8	8	1.6	18	13	2.6
9	12	2.4	19	5	1
10	13	2.5	20	5	1
			جمع	193	38.6

$$\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^m U_i}{m} = \frac{38.6}{20} = 1.93$$

بنابراین

لذا حدود کنترل آزمایشی و خط مرکزی عبارتند از:

$$CL = \bar{U} = 1.93$$

$$UCL = 1.93 + 3\sqrt{\frac{1.93}{5}} = 3.79$$

$$LCL = 1.93 - 3\sqrt{\frac{1.93}{5}} = 0.07$$

بدیهی است در همه نمونه‌ها  $U_i$  داخل حدود کنترل قرار دارد.

**نکته:** اگر اندازه زیرگروه‌ها یعنی  $n_i$ ها برابر نباشند بایستی برای هر نمونه حدود کنترل مخصوص آن نمونه را یافت این نمودار قدری پیچیده شده محاسبات را مشکل می‌سازد برای رفع این مشکل دو راه حل پیشنهاد می‌شود.

الف) از متوسط تعداد نمونه‌ها  $\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i}{m}$  به عنوان مقدار برابر  $n$  استفاده می‌کنیم. در این حال یک حدود کنترل آزمایشی مانند قبل

وجود می‌آید

ب) آماره استاندارد شده



$$Z_i = \frac{U_i - \bar{U}}{\sqrt{\frac{\bar{U}}{n_i}}}$$

را به کار می‌بریم که  $U_i$  متوسط تعداد نقص در نمونه  $i$ ام متوسط تعداد نقص در هر واحد برای کل نمونه‌هاست. در این حال بایستی قرار دهیم  $CL = 0$  و  $UCL = +3$  و  $LCL = -3$

### تابع مشخصه عملکرد نمودار P

می‌دانیم تابع مشخصه عملکرد احتمال قبول فرض  $H_0$  را نشان می‌دهد. احتمال قبول  $H_0$  بر حسب  $p$  پیدا می‌شود یعنی منحنی OC تابعی از  $p$  است احتمال خطای نوع دوم که همان احتمال قبول  $H_0$  به شرط نادرستی  $H_0$  است می‌تواند احتمال ماندن در حدود کنترل آزمایشی را وقتی  $p$  تغییر کرده بیشتر شود.

$$\begin{aligned}\beta &= P(LCL < \hat{p} < UCL | p) \\ &= P(\hat{p} < UCL | p) - P(\hat{p} \leq LCL | p) \quad (\hat{p} = \frac{X}{n} \text{ با توجه به تعریف}) \\ &= P(X < nUCL | p) - P(X \leq nLCL | p)\end{aligned}$$

$$X \sim b(n, p)$$

برای محاسبه  $\beta$  بر حسب  $p$  از فرمول بالا کافی است تابع توزیع تجمعی دو جمله‌ای را برای  $p, n$  داشته باشیم. استفاده از  $\bar{p}$  به جای  $p$  در روابط بالا اشکالی ندارد.

در مثال زیر جدول مربوط به محاسبه  $\beta$  را می‌توان دید.

حال می‌توانیم متوسط طول دنباله ARL (Average Run Length) را برای نسبت اقلام معیوب محاسبه نماییم. در واقع وقتی فرآیند واقعاً تحت کنترل باشد ARL متوسط تعداد نقاطی است که باید رسم شود تا یک نقطه اشتباهاً خارج از کنترل رسم شود و وقتی فرآیند خارج از کنترل است ARL متوسط نقاطی است که باید رسم شود تا یک نقطه به درستی خارج از کنترل رسم شود.

**مثال:** فرض کنید در یک فرآیند که برای نمونه‌های  $n=100$  تایی از قطعات تولیدی یک کارخانه نسبت معیوب‌ها را بررسی می‌کند حدود کنترل آزمایشی به شرح زیر موجود است.

$$CL = 0.04 \quad , \quad UCL = 0.075 \quad , \quad LCL = 0.005$$

الف) احتمال خطای نوع دوم را به عنوان تابعی از  $p$  تشکیل دهید و برای 15 مقدار متفاوت  $p$  نمودار OC را رسم کنید.

**حل :**

$$\begin{aligned}\beta &= P(\hat{p} < UCL | p) - P(\hat{p} \leq LCL | p) \\ &= P(X < nUCL) - P(X \leq nLCL) \\ &= P(X < 100(0.075)) - P(X \leq 100(0.05)) \\ &= P(X < 7.5) - P(X \leq 0.5) = g(p)\end{aligned}$$

برای محاسبه با توجه به آن که  $X \sim b(n=100, p)$  می‌توانیم برای

$$\lambda = np = 100p < 10$$

از تقریب پواسون و برای  $np = 100p > 10$  از تقریب نرمال استفاده نماییم.

p	np	$P\{X < 7.5   np\}$	$P\{X \leq 0.5   np\}$	$\beta$
0	0	1.0000	1.0000	0.0000
0.005	0.5	1.0000	0.6065	0.3935
0.01	1	1.0000	0.3679	0.6321
0.03	3	0.9881	0.0498	0.9383
0.04	4	0.9489	0.0183	0.9306
0.06	6	0.7440	0.0025	0.7415
0.07	7	0.5987	0.0009	0.5978
0.08	8	0.4530	0.0003	0.4526
0.1	10	0.2202	0.0000	0.2202
0.125	12.5	0.0698	0.0000	0.0698
0.2	20	0.0008	0.0000	0.0008
0.25	25	0.0000	0.0000	0.0000

(ب) احتمال خطای نوع اول چقدر است.

$$\begin{aligned}\alpha &= P(H_0 \text{ رد} | H_0 \text{ درستی}) = P(\text{نقطه خارج از حدود کنترل} | p = 0.04) \\ &= P(\hat{p} \leq LCL | p = 0.04) + P(\hat{p} \geq UCL | p = 0.04) \\ &= P(X \leq 100 LCL | p = 0.04) + P(X \geq 100 UCL | p = 0.04)\end{aligned}$$

که  $X \sim b(100, p = 0.04)$  و با توجه به  $\lambda = np = 4$  تقریب پواسون برای دوجمله‌ای مناسب می‌باشد لذا

$$\alpha = P(X \leq 100(0.005)) + P(X \geq 100(0.075))$$

که  $X \sim P(\lambda = 4)$  و بر اساس جدول پواسون

$$\begin{aligned}\alpha &= P(X \leq 0.5) + P(X \geq 7.5) \\ &= P(X = 0) + 1 - P(X \leq 7) \\ &= 0.018 + (1 - 0.948) = 0.07\end{aligned}$$

(ج) احتمال خطای نوع دوم را برای  $p = 0.07$  حساب کنید.

$$\begin{aligned}\beta &= P(H_0 \text{ قبول} | H_0 \text{ نادرستی}) = P(\text{نقطه داخل حدود کنترل} | p = 0.07) \\ &= P(\hat{p} < UCL | p = 0.07) = P(\hat{p} \leq LCL | p = 0.005) \\ &= P(X < 100(0.075)) - P(X \leq 100(0.005)) \\ &= P(X < 7.5) - P(X \leq 0.5)\end{aligned}$$

که  $X \sim P(\lambda = 7)$  و بنا به جدول

$$\beta = 0.598 - 0 = 0.598$$

(د) مقادیر ARL را برای دو حالت تحت کنترل و خارج از کنترل بودن فرآیند پیدا کنید. در صورت خارج از کنترل بودن  $p = 0.07$  را در نظر بگیرید.

$$ARL = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.07} = 14.29 \approx 15 \\ \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{1-0.598} = 2.48 \approx 3 \end{cases}$$

یعنی در صورتی که نسبت معیوب‌ها به 0.07 افزایش یابد با سومین نقطه این مطلب مشخص می‌شود و اگر 15 نقطه رسم کنیم حتی وقتی نسبت واقعی معیوب‌ها 0.04 می‌باشد یک نقطه خارج از حدود کنترل رسم می‌شود.

### طبقه بندی نقص‌ها

یک نقطه سیاه روی رنگ در یک اتومبیل نقص است انحراف فرمان اتومبیل هم یک نقص است اما به وضوح تفاوت بسیار زیادی بین این دو نقص وجود دارد پس لازم است نقص‌ها از نظر اهمیت تقسیم‌بندی کنیم.

گروه A (بسیار مهم) نشان دهنده آن است که محصول برای استفاده مناسب نیست.

گروه B (مهم) نشان دهنده آن است که محصول دچار از کارافتادگی می‌شود و هزینه نسبت بالا دارد.

گروه C (با اهمیت متوسط) نشان دهنده نقصان عملکرد در حین کار است.

گروه D (با اهمیت کم) آن است که عملکرد دستگاه مشکلی ندارد اما در شکل ظاهری یا کارکرد خوب اشکال دارد.

این رده‌بندی توسط اچ اف داج H.F.Dodge در سال ۱۹۲۸ ارائه شده است.

با فرض آن که  $X_A, X_B, X_C, X_D$  تعداد نقص‌های گروه‌های چهارگانه فوق باشد  $X = 100X_A + 50X_B + 10X_C + X_D$  تعداد نقص‌ها در واحد مورد بررسی را اندازه می‌گیرد و وزن‌های مطر شده به صورت تجربی معمولاً به کار می‌رود اما در صورت نیاز به استفاده از وزن‌های دیگر با توجه به شرایط بوجود آمده اشکالی ندارد.

در صورت وزن‌دهی بالا می‌توان از روابط زیر استفاده کرد.

$$U = \frac{X}{n} \rightarrow \bar{U} = 100\bar{U}_A + 50\bar{U}_B + 10\bar{U}_C + \bar{U}_D$$

$$U = \frac{(100)^2 \bar{U}_A + (50)^2 \bar{U}_B + (10)^2 \bar{U}_C + \bar{U}_D}{n}$$

و لذا خط مرکزی و حدود کنترل آزمایشی عبارتند از:

$$C.L = \bar{U}$$

$$U.C.L = \bar{U} + 3\hat{\sigma}_u$$

$$L.C.L = \bar{U} - 3\hat{\sigma}_u$$

### تابع مشخصه عملکرد نمودارهای U, C

در نمودار C احتمال خطای نوع دوم برابر است با:

$$\beta = P(X < U.C.L | C) - P(X \leq L.C.L | C)$$

که در آن X دارای توزیع پواسون با پارامتر C است.

و در نمودار U احتمال خطای نوع دوم عبارت است از:

$$\beta = \left( P \left( L.C.L < \frac{C}{n} \right) U.C.L | U.L \right)$$

$$= P(nL.C.L < C \leq nU.C.L | U)$$

$$= \sum_{[nL.C.L]+1}^{[nU.C.L]} \frac{e^{-nu} (nu)^c}{c!}$$

که در آن  $[nU.C.L]$  جزء صحیح nU.C.L است.

**مثال:** فرض کنید 30 بار نمونه 400 تایی گرفته‌ایم و جمعاً 1200 قلم معیوب مشاهده کرده‌ایم و اگر بدانیم نسبت معیوب‌ها به 0.2 تغییر یافته است (الف) احتمال آن که این تغییر به وسیله اولین نمونه بعد از ایجاد آن کشف شود چقدر است.

(ب) طول دنباله موردنیاز برای پی بردن به این تغییر را بیابید.

**حل :** الف) بر اساس اطلاعات داده شده

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^m \frac{X_i}{mn} = \frac{1200}{30(400)} = 0.1, \quad n\bar{p} = 400(0.1) = 40$$

$$UCL_{np} = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} = 40 + 3\sqrt{40(1-0.1)} = 58$$

$$LCL_{np} = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} = 40 - 3\sqrt{40(1-0.1)} = 22$$

حال

$$1 - \beta = P(1 - \text{کشف تغییر در اولین نمونه}) = 1 - P(LCL < X < UCL | p = 0.2)$$

$$= 1 - P(X < UCL | p = 0.2) + P(X \leq LCL | p = 0.2)$$

که

$$np = 80 > 10 \text{ که } X \sim b(n = 400, P = 0.2)$$

تقریب نرمال با تصحیح پیوستگی مناسب می‌باشد.

$$1 - \beta = 1 - \Phi\left(\frac{58 + 0.5 - 80}{\sqrt{80(0.8)}}\right) + \Phi\left(\frac{22 - 0.5 - 80}{\sqrt{80(0.8)}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{-21.5}{8}\right) + \Phi\left(\frac{-58.5}{8}\right)$$

$$= 1 - \Phi(-2.69) + \Phi(-7.31)$$

$$1 - \Phi(-2.69) = \Phi(2.69) = 0.99158$$

**حل :** ب)

$$ARL = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{0.99158} \approx 1$$

**مثال:** می‌خواهیم یک نمودار کنترل با خط مرکزی 0.02 و حدود کنترل 2.5 انحراف معیار رسم کنیم طوری که حد پایین کنترل (LCL) مثبت باشد چه تعداد نمونه لازم است؟

**حل :**

$$P = 0.02, \quad K = 2.5$$

$$n > \frac{1-p}{p} K^2 \rightarrow n > \frac{0.98}{0.02} (2.5)^2 = 306.25$$

پس

$$n \geq 307$$

**مثال:** در مثال قبل اگر نسبت اقلام معیوب به 0.045 تغییر پیدا کند و بخواهیم با احتمال 50% به این رخداد پی ببریم چه تعداد نمونه لازم است؟

**حل :** با توجه به فرمول زیر داریم.

$$n = \left(\frac{k}{\delta}\right)^2 p(1-p) = \left(\frac{2.5}{0.025}\right)^2 (0.2)(0.98) = 196$$

زیرا

$$\delta = \hat{p} - p = 0.045 - 0.02 = 0.025$$

**مثال:** فرض کنید در یک فرایند تولیدی نمونه‌های 100 تایی گرفته‌ایم و خط مرکزی نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب  $CL = 0.03$  بوده است. اگر 10 نمونه 100 تایی جدید به صورت زیر گرفته باشیم آیا فرآیند تحت کنترل آماری می‌باشد؟

شماره نمونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
تعداد معیوب	4	7	6	3	0	5	2	4	7	7

**حل:** کافی است  $H_0: p_1 = p_2$  را در برابر  $H_1: p_1 \neq p_2$  آزمون کنیم که  $p_1$  نسبت اقلام معیوب جدید و  $p_2$  همان نسبت اقلام

$$\hat{p}_1 = \frac{\sum X_i}{\sum n_i} = \frac{35}{10(100)} = 0.035 \quad \text{معیوب قبلی است که برآورد آن برابر 0.03 در نظر گرفته می‌شود پس}$$

$$\hat{p}_2 = 0.03$$

$$\hat{p} = \frac{n\hat{p}_1 + n\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{100(0.035) + 100(0.03)}{200} = \frac{3.5 + 3}{200} = \sqrt{0.0325}$$

حال بر اساس آماره آزمون نرمال داریم  $0.035 - 0.03$

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.035 - 0.03}{\sqrt{(0.0325)(0.9675)\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100}\right)}} = 0.2$$

که چون  $|Z| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$  یعنی  $Z_{0.025} = 1.96 > 0.2$  پس  $H_0$  رد نمی‌شود و فرآیند هنوز تحت کنترل می‌باشد یعنی نسبت اقلام معیوب در سطح  $\alpha = 0.05$  تغییر نکرده است.

**مثال:** فرض کنید در یک کارخانه هر بار 3 یخچال را به عنوان نمونه در نظر گرفته تعداد نقص‌ها را می‌شماریم. اگر متوسط تعداد نقص در هر یخچال وقتی فرآیند تحت کنترل است برابر 3 برآورد شود احتمال خطای نوع اول کدام است؟

$$UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} = 12$$

$$UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} = 12 \quad \text{و لذا } \bar{C} = n\bar{U} = 3(3) = 9 \quad \text{می‌دانیم}$$

$$LCL = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}} < 0$$

$$\alpha = P(H_0 \text{ رد} | H_0 \text{ درستی})$$

$$= P(X < LCL | \lambda = 10) + P(X \geq UCL | \lambda = 10)$$

$$= P(X < 0 | \lambda = 10) + 1 - P(X \leq 11 | \lambda = 10)$$

$$= 0 + 1 - 0.696 = 0.304$$

## تست‌ها

۱ - فرض کنید اعداد زیر تعداد بخاری‌های نمونه گرفته شده و خراب را در 10 روز نشان می‌دهد.

روز	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	جمع
تعداد نمونه $n_i$	80	110	90	75	130	120	70	125	105	95	1000
تعداد خراب $X_i$	4	7	5	8	6	6	4	5	8	7	60

حد کنترل بالایی برای نسبت اقلام معیوب بر اساس متوسط تعداد نمونه‌ها کدام است؟

- (۱) 0.13      (۲) 0.024      (۳) 0.074      (۴) 0.123

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$\bar{p} = \frac{\sum X_i}{\sum n_i} = \frac{60}{1000} = 0.06, \quad \bar{n} = \frac{\sum n_i}{m} = \frac{1000}{10} = 100$$

$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{\bar{n}}} = 0.06 + 3\sqrt{\frac{(0.06)(0.94)}{100}} = 0.132$$

۲ - یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب فرآیندی در نمونه‌های 50 تایی برابر 0.04 نشان می‌دهد اگر نسبت اقلام معیوب به 0.07

تغییر پیدا کند احتمال آن که روز بعد به وجود این تغییر پی برده شود کدام است؟

- (۱) 0.066      (۲) 0.096      (۳) 0.934      (۴) 0.904

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\bar{p} = 0.04, \quad UCL = 0.04 + 3\sqrt{\frac{(0.04)(0.96)}{50}} = 0.135$$

$$LCL = 0$$

(وقوع تغییر | کشف تغییر در اولین نمونه)  $1 - \beta = p$

$$= p(X > 50(0.135) | p = 0.07) + p(X \leq 0 | p = 0.07)$$

با توجه به تقریب پواسون برای دو جمله‌ای

$$= 1 - P(X \leq 6.75 | np = \lambda = 3.5) + p(X \leq 0 | \lambda = 3.5)$$

$$= 1 - 0.934 + 0.03 = 0.066 + 0.03 = 0.096$$

۳ - در یک نمودار کنترل با مقدار  $np=16$  برای تعداد قطعات معیوب تولیدی توسط یک کارخانه در نمونه‌های 400 تایی بررسی

می‌شود اگر میانگین فرآیند به  $np=20$  تغییر یابد احتمال پی بردن به این تغییر حداقل تا پایان روز سوم کدام است؟

- (۱) 0.983      (۲) 0.967      (۳) 0.976      (۴) 0.0170

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$np = 16, \quad n = 400 \rightarrow \bar{p} = \frac{16}{400} = 0.04$$

$$UCL = np + 3\sqrt{np(1-\bar{p})} = 16 + 3\sqrt{16(1-0.04)} = 27.758 \cong 28$$

$$LCL = np - 3\sqrt{np(1-\bar{p})} = 16 - 3\sqrt{16(1-0.04)} = 16 - 11.758 = 4.242 \cong 4$$

با توجه به تقریب نرمال  $1 - \beta = p(X > UCL) + p(X < LCL)$

$$1 - \Phi\left(\frac{28 + \frac{1}{2} - 20}{\sqrt{20(0.8)}}\right) + \Phi\left(\frac{4 - \frac{1}{2} - 20}{\sqrt{20(0.8)}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(2.12) = 1 - 0.983 = 0.017$$

حال

$$p \text{ (عدم شناسایی)} = [p \text{ (شناسایی حداقل در سومین نمونه)}]^2$$

$$= (0.983)^2 = 0.967$$

۴ - در سوال قبل تعداد نمونه حداقل چه باشد تا حد کنترل پایین نمودار با حدود کنترل 3.5 انحراف معیار مثبت بماند؟

(۱) 74 (۲) 48 (۳) 64 (۴) 65

حل : گزینه ۴ صحیح است.

$$n > \left(\frac{1-p}{p}\right) L^2 = \frac{1-0.16}{0.16} (3.5)^2 = 64.313$$

پس  $n \geq 65$

۵ - در یک فرآیند خط مرکزی نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب  $p=0.014$  بوده است اگر بخواهیم حدود کنترل 2.5 انحراف معیار را

طوری به کار ببریم که حد پایین نمودار کنترل مثبت باشد چه تعداد نمونه لازم است؟

(۱) 400 (۲) 360 (۳) 441 (۴) 280

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$n > \frac{1-p}{p} L^2 = \frac{1-0.014}{0.014} (3.5)^2 = 440.1 \approx 441$$

۶ - در سوال قبل اگر نسبت اقلام معیوب به 0.024 تغییر یابد چه تعداد نمونه لازم است تا بتوان با احتمال  $\frac{1}{2}$  به وجود تغییر پی

برد؟

(۱) 800 (۲) 863 (۳) 470 (۴) 629

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$n = \left(\frac{k}{\delta}\right)^2 p(1-p) = \left(\frac{2.5}{0.01}\right)^2 (0.014)(0.986) = 862.75 \approx 863$$

$$\delta = 0.024 - 0.014 = 0.1 = 0.01$$

۷ - اگر احتمال پی بردن به یک تغییر در اولین نمونه پس از ایجاد آن در نمودار کنترل  $p$  برابر 0.15 باشد احتمال آن که این تغییر

حداقل در نمونه چهارم مشاهده شود کدام است؟

(۱)  $(0.85)^3$  (۲)  $(0.85)^4$  (۳)  $(0.85)^2(0.815)$  (۴)  $(0.85)^3(0.815)$

حل : گزینه ۱ صحیح است.

بر اساس روابط توزیع هندسی

$$P(X \geq 4) = q^3 = (0.85)^3 \quad q = 1 - 0.15 = 0.85$$

که  $X$  تعداد نمونه لازم برای یافتن تغییر و دارای توزیع هندسی یا پارامتر  $p=0.15$  است.

۸- فرض کنید با نمونه‌های 100 تایی حدود کنترل و خط مرکزی نمودار نسبت اقلام معیوب را به صورت زیر یافته‌ایم.

$$CL = 0.1, \quad UCL = 0.19$$

$$LCL = 0.01$$

احتمال خطای نوع اول کدام است؟

0.008 (۴)

0.005 (۳)

0.08 (۲)

0.05 (۱)

حل : گزینه ۴ صحیح است.

$$\alpha = p(X \leq LCL | p = 0.1) + P(X \geq UCL | p = 0.1)$$

با توجه به تقریب دو جمله‌ای به پواسون داریم  $\lambda = np = 10$  و لذا

$$\alpha = P(X \leq 10(0.01)) + P(X \geq 10(0.19))$$

با استفاده از جدول پواسون

$$= 0 + 1 - 0.992 = 0.008$$

۹- در سوال قبلی احتمال خطای نوع دوم با  $p=0.020$  کدام است؟

0.008 (۴)

0.138 (۳)

0.381 (۲)

0.18 (۱)

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$= P(X < 10(0.19) | \lambda = 20) - P(X \leq 10(0.01) | \lambda = 20)$$

$$= P(X < 19 | \lambda = 20) - P(X \leq 1 | \lambda = 20)$$

$$= P(X \leq 18 | \lambda = 20) - P(X \leq 1 | \lambda = 20) = 0.381$$

۱۰- اگر در یک فرآیند نسبت اقلام معیوب وجود یک تغییر در  $p$  با احتمال 0.217 در اولین نمونه پس از وقوع تغییر کشف شود به

صورت متوسط چه مقدار نمونه  $n$  تایی باید گرفت؟

5 (۴)

4 (۳)

3 (۲)

2 (۱)

حل : گزینه ۴ صحیح است.

$$ARL = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{0.217} = 4.6 \approx 5$$

۱۱- اگر در یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب داشته باشیم

$$UCL = 0.0862, \quad LCL = 0.0138, \quad n = 100$$

فاصله حدود کنترل چه ضریبی از انحراف معیار  $\bar{p}$  می‌باشد؟

3 (۴)

2.5 (۳)

3.3 (۲)

4.5 (۱)

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$UCL - LCL = 0.0862 - 0.0138 = 0.0724$$

$$\sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = \sqrt{\frac{(0.05)(0.95)}{100}} = 0.0218$$

حال

$$\frac{0.0724}{0.0318} = 3.32$$



۱۲ - اگر حدود کنترل بالا و پایین نمودار نسبت اقلام معیوب به صورت  $LCL=0.049$  ,  $LCL=0.031$  باشد احتمال خطای نوع اول بر اساس تعداد اقلام معیوب در نمونه‌های 100 تایی به چه فرمی است؟

$$P(X < 3 | p = 0.04) \quad (۱)$$

$$P(X \leq 3 | p = 0.04) + P(X > 5 | p = 0.04) \quad (۲)$$

$$P(X \leq 3 | p = 0.04) + P(X \geq 5 | p = 0.04) \quad (۳)$$

$$P(X < 3 | p = 0.04) + P(X \geq 5 | p = 0.04) \quad (۴)$$

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$\alpha = P(X \leq 100 LCL | p = CL = 0.04)$$

$$+ P(X \geq 100 UCL | p = 0.04)$$

$$= P(X \leq 3.1 | p = 0.04) + P(X \geq 4.9 | p = 0.04)$$

$$= P(X \leq 3 | p = 0.04) + P(X \geq 5 | p = 0.04)$$

۱۳ - فرض کنید خط مرکزی نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب  $CL=0.03$  باشد و با احتمال 0.002 علی‌رغم آن‌که فرآیند تحت کنترل است ما فرآیند را خارج از کنترل اعلام می‌کنیم چه تعداد نمونه  $n=160$  تایی لازم است گرفته شود تا فرآیند تحت کنترل را خارج از کنترل اعلام کنیم.

$$160 \quad (۱) \quad 32 \quad (۲) \quad 500 \quad (۳) \quad ۳۲۰ \quad (۴)$$

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$ARL = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.002} = \frac{100}{2} = 500$$

۱۴ - تعداد کل کلیدهای معیوب در 20 بار نمونه‌گیری 100 تایی 117 عدد می‌باشد حد بالای نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب کدام گزینه است؟

$$0.۱۲۸۹ \quad (۱) \quad 0.0585 \quad (۲) \quad 0 \quad (۳) \quad 0.0289 \quad (۴)$$

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$n = 100, \quad m = 20 \quad \sum_{i=1}^m D_i = 117 \quad \bar{P} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{mn} = \frac{117}{20(100)} = 0.0585$$

$$UCL_p = \bar{P} + 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} = 0.0585 + 3\sqrt{\frac{0.0585(1-0.0585)}{100}} = 0.1289$$

۱۵ - در یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب فرآیندی برابر 0.02 است، اگر نسبت اقلام معیوب فرآیند به 0.04 تغییر پیدا کند آنگاه احتمال این‌که 2 روز بعد به‌وجود این تغییر پی برده شود کدام گزینه است؟ (نمونه‌های 90 تایی بازرسی می‌شوند)

$$0.278 \quad (۴) \quad 0.145 \quad (۳) \quad 0.2 \quad (۲) \quad 0.3 \quad (۱)$$

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\bar{p} = 0.02, \quad n = 50$$

$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} = 0.02 + 3\sqrt{\frac{0.02 \times 0.98}{50}} = 0.0794$$

$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{P}(1-\bar{P})}{n}} = 0.02 - 3\sqrt{\frac{0.02 \times 0.98}{50}} = 0.02 - 0.0594 \Rightarrow 0$$



$$= \Phi\left(\frac{UCL + 0.5 - nP_{new}}{\sqrt{nP(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{LCL - 0.5 - nP_{new}}{\sqrt{nP(1-p)}}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{6.2 + 0.5 - 20}{\sqrt{20(1-.2)}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 0.5 - 20}{\sqrt{20(1-0.02)}}\right) = \Phi(-3.325) - \Phi(-5.125) = 0.0005$$

۲۰- در طراحی یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب با خط مرکزی  $P=0.3$  و حدود کنترل سه انحراف معیار، چه اندازه نمونه مورد نیاز است تا بتوان با احتمال 0.5 به وجود تغییر نسبت اقلام معیوب به 0.38 پی برد؟

(۱) 296 (۲) 295 (۳) 400 (۴) 399

حل : گزینه ۱ صحیح است.

با استفاده از روش دانکن برای  $P=0.5$  (شناسایی)

$$n = \left(\frac{k}{p_2 - p_1}\right)^2 \times p_1(1-p_1) = \left(\frac{3}{0.08}\right)^2 \times 0.3(1-0.3) = 295.3 \approx 296$$

۲۱- در فرآیندی متوسط نسبت اقلام معیوب 0.07 به دست آمده است و حدود کنترل 3 انحراف معیار برای آن در نظر گرفته شده است، در صورتی که نسبت اقلام معیوب به طور ناگهانی به 0.1 تغییر کند احتمال پی بردن به وجود تغییر به وسیله نمونه اول یا دوم بعد از ایجاد آن کدام گزینه است؟ (اندازه‌ی نمونه‌ها 400 می‌باشد)

(۱) 0.53 (۲) 0.47 (۳) 0.27 (۴) 0.73

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$P(\text{شناسایی تغییر} | P_{new}) = 1 - \beta = 1 - P(\hat{p} < UCL | P_{new}) + P(\hat{p} \leq LCL | P_{new})$$

$$= 1 - P(D < nUCL | nP_{new}) + P(D \leq LCL | nP_{new})$$

که چون  $nP_{new} = 400 \times 0.1 = 40 > 15$  بنابراین از تقریب نرمال برای Bin استفاده می‌کنیم.

$$= 1 - \Phi\left(\frac{nUCL - np + 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right) + \Phi\left(\frac{nLCL - np - 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{43.2 - 40 + 0.5}{\sqrt{40(1-0.1)}}\right) + \Phi\left(\frac{12.8 - 40 - 0.5}{\sqrt{40(1-0.1)}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(0.62) + \Phi(-4.62) = 1 - 0.72907 + 0 = 0.27$$

$$P(\text{شناسایی در اولین یا دومین نمونه}) = 0.27 + (1 - 0.27) \times 0.27 = 0.47$$

۲۲- در یک نمودار کنترل نسبت اقلام معیوب  $UCL=0.19$  و  $CL=0.1$  ,  $LCL=0.01$  برای کنترل فرآیندی استفاده می‌شود، اگر نسبت اقلام معیوب واقعی  $P=0.02$  باشد آن گاه احتمال پی بردن به وجود تغییر حداقل به وسیله سومین نمونه بعد از ایجاد آن کدام گزینه است؟

(۱) ۰.۶۱۹ (۲) 0.381 (۳) 0.145 (۴) 0.383

حل : گزینه ۳ صحیح است.

از توزیع پواسون برای تقریب استفاده شده است.

$$\lambda = nP_{new} = 100 \times 0.2 = 20$$



حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$CL = \bar{C} = \frac{225}{25} = 9$$

$$UCL = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} = 9 + 3 \times 3 = 18$$

۲۷ - می‌خواهیم فرآیند تولید یک ساعت الکتریکی را با استفاده از نمودار تعداد نقص‌ها کنترل کنیم. واحد بازرسی ۱ ساعت است و

در بررسی ۱۰۰ ساعت الکتریکی ۱۶ ساعت معیوب مشاهده گردید. حد بالای ۳ انحراف معیار را برای این نمودار به دست آورید؟

- (۱) ۱.۳      (۲) ۱.۳۶      (۳) ۰.۶۴      (۴) ۰.۱۶

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\sum D_i = 16 \quad , \quad \bar{C} = \frac{16}{100} = 0.16$$

$$UCL_{\bar{C}} = \bar{C} + 3\sqrt{\bar{C}} = 0.16 + 3 \times 0.4 = 0.16 + 1.2 = 1.36$$

$$LCL_{\bar{C}} = \bar{C} - 3\sqrt{\bar{C}} = 0.16 - 3 \times 0.4 \Rightarrow 0$$

۲۸ - در سوال قبلی احتمال خطای نوع I برابر کدام گزینه است؟

- (۱) ۰.۰۰۴      (۲) ۰.۰۱۲۸      (۳) ۰.۹۹۵      (۴) ۰.۰۰۵

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\alpha = P(D < LCL | C) + P(D \geq UCL | C) = P(D < 0 | C = 0.16) + 1$$

$$- P(D < UCL | C = 0.16) = 0 + 1 - POI(1, 0.16) = 1 - 0.9872 = 0.0128$$

از روش درون‌یابی  $POI(1, 0.16)$  را به دست می‌آوریم.

$$\lambda = 0.1 \quad POI = 0.995$$

$$\lambda = 0.2 \quad POI = 0.982$$

$$\frac{0.16 - 0.1}{0.1} = \frac{X - 0.995}{0.982 - 0.995}$$

$$0.1X = 0.06 \times (0.982 - 0.995) + 0.1 \times 0.995$$

$$X = 0.9872$$

۲۹ - اگر تعداد متوسط نقص‌های واقعی در سوال قبلی ۱ باشد احتمال خطای نوع II کدام گزینه است؟

- (۱) ۰.۲۶۵      (۲) ۰.۷۳۵      (۳) ۰.۰۱      (۴) ۰.۹۹

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$\beta = P(LCL < D < UCL | C = 1) = P(0 < D < 1.36 | C = 1)$$

$$= POI(1, 1) - POI(0, 1) = 0.735$$

۳۰ - اگر تعداد متوسط نقص‌ها واقعی در سوال قبلی ۱ باشد، متوسط طول دنباله کدام گزینه است؟

- (۱) ۳      (۲) ۴      (۳) ۲      (۴) ۱

حل : گزینه ۲ صحیح است.

$$ARL = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{0.265} = 3.77 \approx 4$$

۳۱- در صورتی که متوسط طول دنباله برای کشف تغییر در تعداد نقص‌ها برابر 4 باشد احتمال خطای نوع II برابر کدام گزینه است؟

0.9 (۴)

0.75 (۳)

0.1 (۲)

0.25 (۱)

حل : گزینه ۳ صحیح است.

$$ARL = 4 = \frac{1}{1-\beta}, \quad 1-\beta = 0.25, \quad \beta = 0.75$$

۳۲- در صورتی که متوسط طول دنباله برای موقعی که نمودار نسبت معیوب تحت کنترل است برابر 3 باشد احتمال خطای نوع I

برابر کدام گزینه است؟

0 (۴)

1 (۳)

0.77 (۲)

0.33 (۱)

حل : گزینه ۱ صحیح است.

$$ARL = 3 = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{3} = 0.33$$

**Appendix I**  
Cumulative poisson distribution\*

x	$\lambda$							
	0.01	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60
0	0.990	0.951	0.904	0.818	0.740	0.670	0.606	0.548
1	0.999	0.998	0.995	0.982	0.963	0.938	0.909	0.878
2		0.999	0.999	0.998	0.996	0.992	0.985	0.976
3				0.999	0.999	0.999	0.998	0.996
4					0.999	0.999	0.999	0.999
5							0.999	0.999

x	$\lambda$							
	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40
0	0.496	0.449	0.406	0.367	0.332	0.301	0.272	0.246
1	0.844	0.808	0.772	0.735	0.699	0.662	0.626	0.591
2	0.965	0.952	0.937	0.919	0.900	0.879	0.857	0.833
3	0.994	0.990	0.986	0.981	0.974	0.966	0.956	0.946
4	0.999	0.998	0.997	0.996	0.994	0.992	0.989	0.985
5	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996
6		0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
7				0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
8							0.999	0.999

x	$\lambda$							
	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00	2.10	2.20
0	0.223	0.201	0.182	0.165	0.149	0.135	0.122	0.110
1	0.557	0.524	0.493	0.462	0.433	0.406	0.379	0.354
2	0.808	0.783	0.757	0.730	0.703	0.676	0.649	0.622
3	0.934	0.921	0.906	0.891	0.874	0.857	0.838	0.819
4	0.981	0.976	0.970	0.963	0.955	0.947	0.937	0.927
5	0.995	0.993	0.992	0.989	0.986	0.983	0.979	0.975
6	0.999	0.998	0.998	0.997	0.996	0.995	0.994	0.992
7	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.998	0.998	0.998
8	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
9			0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
10							0.999	0.999

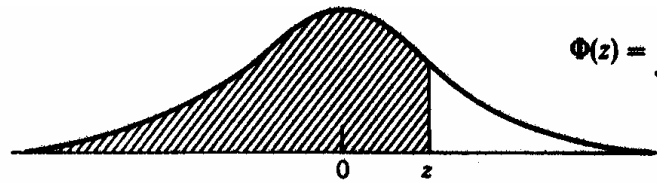
\* Entries in the table are values  $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{c=0}^x (e^{-\lambda} \lambda^c / c!)$ . Blank spaces below the last entry in any column may be read as 1.0; blank spaces above the first entry in any column may be read as 0.0.







## Appendix II



$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	z
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.0
0.1	0.53983	0.54379	0.54776	0.55172	0.55567	0.1
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.2
0.3	0.61791	0.62172	0.62551	0.62930	0.63307	0.3
0.4	0.65542	0.65910	0.62276	0.66640	0.67003	0.4
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.5
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.6
0.7	0.75803	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.7
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79954	0.8
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.9
1.0	0.84134	0.84375	0.84613	0.84849	0.85083	1.0
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87285	1.1
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	1.2
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	1.3
1.4	0.91924	0.92073	0.92219	0.92364	0.92506	1.4
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	1.5
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	1.6
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	1.7
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96637	0.96711	1.8
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	1.9
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	2.0
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	2.1
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	2.2
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	2.3
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	2.4
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	2.5
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	2.6
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	2.7
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	2.8
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	2.9
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	3.0
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	3.1
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	3.2
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	3.3
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	3.4
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	3.5
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	3.6
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	3.7
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	3.8
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	3.9

## Appendix II (Continued)

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

z	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	z
0.0	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586	0.0
0.1	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57534	0.1
0.2	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409	0.2
0.3	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173	0.3
0.4	0.67364	0.67724	0.68082	0.68438	0.68793	0.4
0.5	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240	0.5
0.6	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490	0.6
0.7	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78523	0.7
0.8	0.80234	0.80510	0.80785	0.81057	0.81327	0.8
0.9	0.82894	0.83147	0.83397	0.83646	0.83891	0.9
1.0	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214	1.0
1.1	0.87493	0.87697	0.87900	0.88100	0.88297	1.1
1.2	0.89435	0.89616	0.89796	0.89973	0.90147	1.2
1.3	0.91149	0.91308	0.91465	0.91621	0.91773	1.3
1.4	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189	1.4
1.5	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408	1.5
1.6	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95448	1.6
1.7	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327	1.7
1.8	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062	1.8
1.9	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670	1.9
2.0	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169	2.0
2.1	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574	2.1
2.2	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899	2.2
2.3	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158	2.3
2.4	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361	2.4
2.5	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520	2.5
2.6	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643	2.6
2.7	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736	2.7
2.8	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807	2.8
2.9	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861	2.9
3.0	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900	3.0
3.1	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929	3.1
3.2	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950	3.2
3.3	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965	3.3
3.4	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976	3.4
3.5	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983	3.5
3.6	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989	3.6
3.7	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992	3.7
3.8	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995	3.8
3.9	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997	3.9