ادامه حل مدل سازی برنامه های اعداد صحیح

(Integer programming solutions)

خلاصه مطالب

در این جلسه با انواع روش های حل مدل های برنامه ریزی با اعداد صحیح آشنا خواهیم شد. ابتدا روش های دستی حل مطرح خواهند شد و در جلسات بعد با حل کامپیوتری این مدل ها آشنا خواهیم شد .

هدف این جلسه

آشنائی با انواع روش های حل مدل های برنامه ریزی با اعداد صحیح

عناوین دروس طرح شده در این جلسه

- برنامه ریزی صفر و یک
- الگوریتم شمارش ضمنی (بالاس) روش گوموری (صفحه برش)

برنامه ریزی صفر و یک

نکته

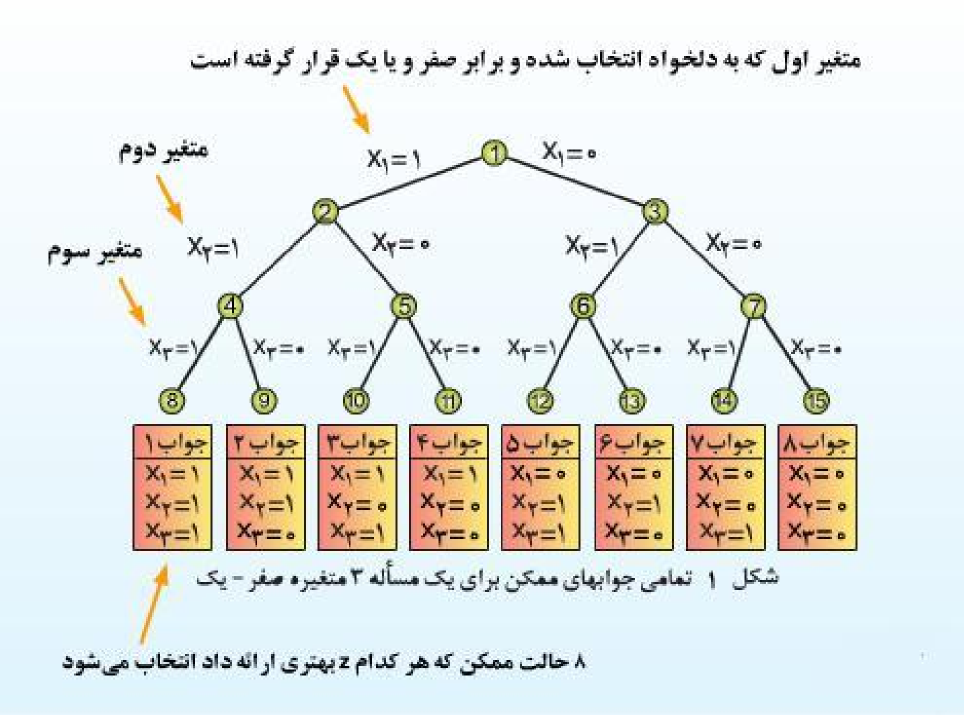
وقتی که متغیرهای تصمیم در یک مسأله برنامه ریزی خطی عدد صحیح، محدود به مقادیر صفر یا یک باشد مسأله برنامه ریزی صفر یک نامیده می شوند. در فصل بعد تعدادی از مدل های صفر ـ یک که زمینه های متفاوتی از کاربرد پژوهش عملیاتی را به نمایش می گذارند، ارایه خواهد شد.

یک **مسأله برنامه ریزی صفر ـ یک** را با بررسی تمامی ترکیب های ممکن از متغیرهای تصمیم که بتوانند جوابی موجه را ارایه کنند، می توان حل کرد. این کار با صفر یا یک قرار دادن مقدار متغیرهای تصمیم صورت می پذیرد. در این صورت، ترکیبی که در تمام محدودیتها صدق کرده و مقدار تابع هدف را به بهترین مقدار برساند، جواب بهینه است. این روش را **روش شمارش صریح** ***(Explicit Enumeration)*** گفته می شود. با این وجود، انجام این روش نیازمند بررسی 2^n ترکیب از n متغیر تصمیم است. به طور مثال اگر مسأله دارای ۳ متغیر تصمیم باشد، تعداد جواب های ممکن آن 2^3 می باشد. شکل ۱۱ـ۱۱ ترکیبهای مختلف متغیرهای تصمیم را به صورت یک درخت نشان می دهد.

همان طور که مشاهده می کنید با افزایش تعداد متغیرها، جوابهای ممکن مسأله به سرعت رو به افزایش می گذارند و قرار دادن این جوابها در

محدودیتها و تابع هدف برای پیدا کردن جوابی موجه و بهینه مستلزم صرف وقتی زیاد است.

الگوریتم شمارش ضمنی *(Implicit Enumeration)* که در سال ۱۹۶۷ توسط **بالاس** *(Balas)* معرفی شد راه حلی برای کاهش جستجو در میان جواب های ممکن مسأله است. این الگوریتم را الگوریتم جمعی نیز می نامند.



شکل ۱ تمامی جوابهای ممکن برای یک مسأله ۳ متغیره صفر - یک

الگوریتم شمارش ضمنی (بالاس)

فرم استانداردی که در این الگوریتم مورد استفاده قرار می گیرد به شکل زیر است :

$$MaxZ=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j \qquad C_j \le 0$$

که:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ (i=1,2,\ldots 3)$$

$x_j=0$ یا 1

در صورتی که مسأله ای به صورت فرم استاندارد نباشد، به طریق زیر قابل استاندارد کردن است :

- اگر محدودیتی به صورت بزرگتر یا مساوی باشد، با ضرب کردن آن محدودیت در یک منفی محدودیت را به صورت کوچکتر یا مساوی می توان تبدیل کرد. منفی شدن عدد سمت راست، مشکلی را برای حل مسأله ایجاد نمی کند .اگر $C_j>0$ باشد با اعمال تغییر متغیر $x_{n}=1-y_j$ می توان ضریب C_j را به منفی تبدیل کرد .
- اگر تابع هدف را به منفی تبدیل کرد .

گردآوری: aharandi@ymail.com

- اگر تابع هدف Min باشد با ضرب کردن تابع هدف در ۱ـ به Max تبدیل می شود .
- اگر محدودیت های مسأله به شکل مساوی باشند آنها را در ازاء هر محدودیت مساوی به دو محدودیت نامساوی به شکل زیر می توان تبدیل کرد :

اگر

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

باشد می توان آن را با

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \end{cases}$$

جایگزین کرد.

نکته

این تبدیل موجب افزایش تعداد محدودیتها می شود و این امر در زمانی که تعداد محدودیتهای مساوی زیادتر باشد مقرون به صرفه نیست. در این وضعیت از روش زیر می توان استفاده کرد:

اگر

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j = b_m \end{cases}$$

باشد، می توان آن را با

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \le b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \le b_2 \\ . \\ . \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j \le b_m \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i, \ (i = 1,2,\dots 3) \end{cases}$$

جایگزین کرد.

مثال) مسأله برنامه ریزی صفر ـ یک زیر را به فرم استاندارد تبدیل کنید .

$$\begin{aligned} Max\ Z &= 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 4x_5 - 8x_6 \\ & 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 4x_5 + 2x_6 \le 6 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 - x_6 \ge 0 \end{aligned}$$

$x_j = 0$ یا ۱ $(j=1,2,\dots,6)$

به منظور استاندارد کردن مسأله، محدودیت دوم را در ۱ـ ضرب کرده و تغییر متغیر زیر را برای متغیرهای x_1 ، x_3، x_5 که دارای ضریب مثبت هستند، انجام می دهیم .

$$x_1 = 1 - y_1 \ , \ x_3 = 1 - y_3 \ , \ x_5 = 1 - y_5$$

به منظور یکسان کردن کلیهٔ متغیرهای تصمیم و نمایش همگی آنها با نماد y_j برای سایر متغیرهایی که دارای ضریب منفی در تابع هدف هستند از تغییر متغیر زیر نیز می توان استفاده کرد.

$$x_2 = y_2 \ , \ x_4 = y_4 \ , \ x_6 = y_6$$

تغییر متغیر اخیر، فقط به منظور زیباسازی مسأله انجام شده و الزامی در انجام آن نیست .

$$\begin{aligned} Max\ Z &= -2y_1 - y_2 - 5y_3 - 3y_4 - 4x_5 - 8x_6 + 11 \\ & -3y_1 - 2y_2 - 7y_3 - 5y_4 - 4y_5 + 2y_6 \le -8 \\ & -y_1 - y_2 - 2y_3 - 4x_4 - 2y_5 + y_6 \ge -5 \end{aligned}$$

$y_j = 0$ یا ۱ $(j=1,2,\dots,6)$

نکته

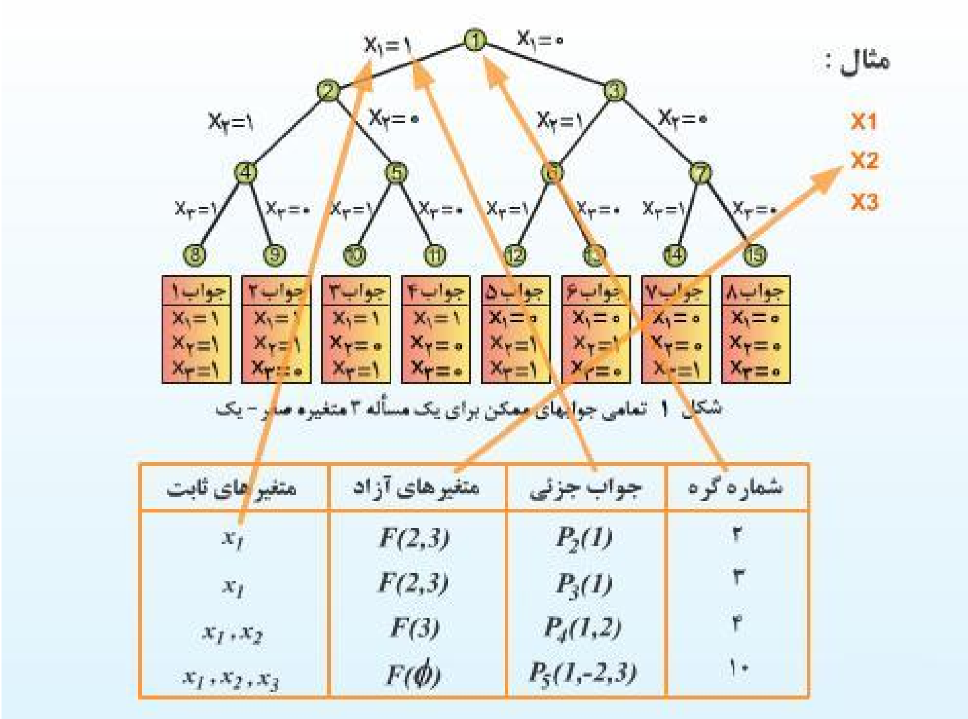
شیوه استفاده این الگوریتم مانند روش انشعاب و تحدید است. چون در فرم استاندارد این نوع از مسایل تمامی ضرایب متغیرهای تصمیم منفی و تابع هدف $MaxZ$ است. **حداکثر** Z (در صورت عدم وجود عدد ثابت در تابع هدف) **صفر** است.
روش شمارش ضمنی با صفر در نظر گرفتن مقدار متغیرهای تصمیم آغاز می شود و در مراحل حل به تدریج سعی می شود که جوابها در محدودیتها صدق کنند. توضیح الگوریتم مستلزم تعریف بعضی از اصطلاحات زیر است.

جواب جزیی (Partial Solution)

در صورتی که به بعضی از متغیرهای تصمیم مقدار (صفر یا یک) اختصاص داده شود به آن جواب جزیی گویند .

متغیرهای آزاد و ثابت (Fixed Variables & Free)

متغیرهای تصمیمی که در جواب جزیی به آنها مقدار اختصاص داده شده باشد، متغیر ثابت و به مابقی متغیرها، متغیرهای آزاد گویند. متغیرهای آزاد، متغیرهایی هستند که انشعابی بر روی آنها انجام نگرفته و تصمیمی برای صفر یا یک بودن آنها صورت نپذیرفته است .به منظور درک بهتر مفهوم متغیرهای آزاد، ثابت و جواب جزیی به مثال توجه کنید .



با استفاده از اطلاعات شکل ۱ برای گره های زیر، جواب جزیی، متغیر آزاد و ثابت را مشخص کنید.

متغیرهای ثابت	متغیرهای آزاد	جواب جزیی	شماره گره
x_1	$F(2,3)$	$P_2(1)$	2
x_1	$F(2,3)$	$P_3(1)$	3
x_1, x_2	$F(3)$	$P_4(1,2)$	4
x_1, x_2, x_3	$F(\phi)$	$P_5(1,-2,3)$	10

جدول ۱۵-۱۱. گره، جواب جزیی و متغیرهای آزاد و ثابت

جواب های جزیی با نماد P_j به نمایش گذارده شده اند. اعداد داخل پرانتز مربوط به جوابهای جزیی، **اندیس متغیرها** را نشان داده و اگر این اندیس با ضریب مثبت بیان شود به معنی داشتن مقدار ۱ برای این متغیر و در صورتی که با

ضریب منفی نشان داده شوند به معنی داشتن مقدار صفر برای متغیر است. مثلاً $P_5(1,-2,3)$ به معنی انجام انشعاب بر روی x_1, x_2, x_3 است .و از آنجا که اندیس x_1 در جواب جزیی با ضریب مثبت نشان داده شده است به معنی $x_1 = 1$ و چون اندیس x_2 در جواب جزیی با (-۲) نشان داده شده است به معنی $x_2 = 0$ است . مجموعه متغیرهای آزاد با نماد F به نمایش گذاشته شده و اعداد داخل پرانتز مربوط به متغیرهای آزاد، اندیس متغیرهایی را که هنوز انشعابی بر روی آنها صورت نپذیرفته است را نشان می دهد. مثلاً $F(2,3)$ بیانگر آزاد بودن متغیرهای x_3، x_2 است .

ضوابط انشعاب

ضوابط انتخاب متغیر برای انشعاب در الگوریتم بالاس به گونه ای است که با انجام تعداد کمتری از انشعاب جواب موجه به دست آمده، بهبود یابد و یا انشعاب به عمق برسد. ضوابط انشعاب به شرح زیر است .

- **ضابطه۱.**

هر متغیر آزادی که ضرایب آن در تمامی محدودیتهایی که مقدار متغیر کمکی آنان منفی است، همگی مثبت باشند برای انشعاب انتخاب نمی شوند. زیرا افزودن این گونه متغیرهای آزاد به جواب جزیی نمی تواند غیرموجه بودن مسأله را بهتر کنند. و باید به عنوان متغیرهایی که امیدبخش نیست کنار گذارده شوند .

- **ضابطه ۲ .**

متغیر آزاد x_j که ضریب آن در تابع هدف c_j می باشد، اگر در رابطهٔ زیر صدق کند برای انشعاب انتخاب نمی شود. این ضابطه تنها بعد از به دست آوردن یک جواب موجه که با z_I نشان داده می شود، قابل اعمال است .

> **تذکر**
>
> $$Z + C_j \le Z_I$$
>
> Z نشان دهندهٔ تابع هدف بر اساس جواب جزیی مربوط به گره مورد بررسی است. عدم انتخاب x_j به این دلیل است که انتخاب آن نمی تواند به یک جواب موجه بهتر منتهی شود.

- **ضابطه ۳.**

از بین متغیرهای آزادی که با ضابطه ۱ و ۲ کنار گذارده نشده اند، متغیری انتخاب می شود که قدرمطلق مجموع مقادیر منفی متغیرهای کمکی را حداقل کند. این ضابطه با استفاده از رابطهٔ زیر قابل اعمال است .

$$V_j = \sum_{j=1}^{n} Min(0, s_i - a_{ij})$$

ضوابط به عمق رسیدن

هر گره به عمق می رسد، اگر :

- مقدار تابع هدف آن گره کمتر از Z_I باشد. اگر مقدار تابع هدف با Z_I مساوی باشد، امکان وجود جواب بهینهٔ چندگانه را نباید از نظر دور داشت .
- نرسیدن به جواب موجه که معادل با رابطهٔ قدرمطلقی زیر است :

| $-S_i$ | > | مجموع ضرایب منفی متغیرهای آزاد |
مربوط به هر گروه

- عدم وجود متغیر آزاد
- رسیدن به یک جواب موجه

گام الگوریتم شمارش ضمنی بالاس

- **گام ۱.**

مسأله را به صورت فرم استاندارد درآورید .

- **گام ۲.**

با استفاده از جواب موجه یک حد پایینی (Z_I) ایجاد کنید. اگر این حد از قبل موجود نباشد، $Z_I = -\infty$ قرار دهید (تمامی متغیرها آزاد هستند)

- **گام ۳ .**

یکی از متغیرها را برای انشعاب انتخاب کنید. برای انجام این کار از ضوابط انتخاب متغیر برای انشعاب استفاده کنید .

- **گام ۴ .**

مقدار تابع هدف، جواب جزیی و متغیرهای آزاد گره بعد از انشعاب را محاسبه کنید و در صورتی که جواب موجه و مقدارش بهتر از Z_I موجود بود، به عنوان مقدار جدید Z_I جایگزین کنید .

- **گام ۵.**

ضوابط به عمق رسیدن را برای گره ناشی از انشعاب مورد استفاده قرار دهید.

- **گام ۶.**

اگر هیچ جواب جزیی باقی نماند، توقف کنید. در غیر این صورت به گام ۳ بروید .

مثال) مسأله برنامه ریزی صفر ـ یک زیر را در نظر بگیرید .

$$Max\ Z = -8x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 - 5x_5$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 \geq 2$$
$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 \geq 4$$

($x_j = 0$ یا ۱ $j=1,2,\ldots,5$)

گام ۱ .با ضرب کردن محدودیتها در (۱ـ) مسأله به صورت فرم استاندازد درآورده و متغیرهای کمکی را به آن اضافه کنید .

$$Max\ Z = -8x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 7x_4 - 5x_5$$
$$-3x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + s_1 = -2$$
$$-5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 + s_2 = -4$$

$x_j = 0$ یا ۱ ($j=1,2,\ldots,5$)

گام ۲:

از آنجا که همهٔ متغیرها آزاد و مقدارشان صفر است. مقدار متغیرهای کمکی منفی شده و هیچ جواب موجهی وجود ندارد. لذا $Z_L = -\infty$ خواهد بود.

گام ۳:

با توجه به ضابطه 1، x5 انتخاب نخواهد شد. چون ضریب آن در هر دو محدودیت مثبت بوده و انتخاب آن موجب بهبود در موجه شدن مساله نخواهد شد.

ضابطه ۲ در این مرحله قابل اعمال نیست چون حد پایینی برابر منفی بی نهایت است.

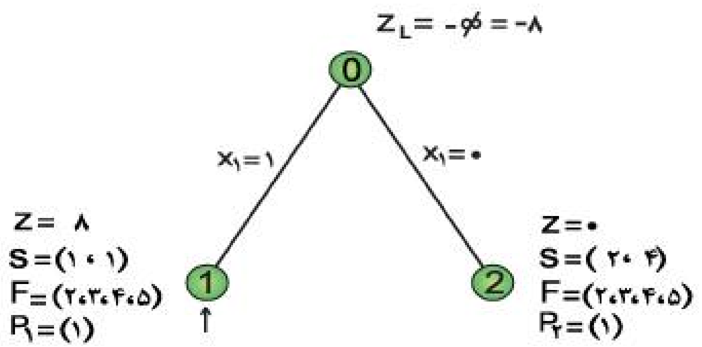
ضابطه ۳ـ Vj ها را محاسبه می کنیم .

x_1

$$V_j = \sum_{i=1}^{m} \min\{0, S_i - a_{ij}\}$$

$$V_1 = \min\{0, (S_1 - a_{11})\} + \min\{0, S_2 - a_{21}\}$$
$$= \min\{0, -2-(-3)\} + \min\{0, -4-(-5)\} = 0$$
$$V_2 = \min\{-2-(-3)\} + \min\{0, -4-(-3)\} = -1$$
$$V_3 = \min\{0, -2-(-1)\} + \min\{0, -4-(-2)\} = -5$$
$$V_4 = \min\{0, -2-(-2)\} + \min\{0, -4-(-1)\} = -7$$

چون از نظر قدرمطلق کوچکترین V_i ، که **میزان غیرموجه بودن** مسأله را نشان می دهد، V_1 است، لذا x_1 برای انشعاب انتخاب می گردد. این انشعاب در شکل زیر مشخص شده است .



شکل 2 اولین انشعاب بر روی x۱

گام ۴ .از آنجا که جواب به دست آمده برای گره ۱ جوابی موجه است، یعنی مقدار S_1 و S_2 مثبت شده اند، $(S_1 = 1\ ,\ S_2 = 1)$ که از این به بعد مقدار آنها بانماد $S = (1,1)$ نشان داده می شود، مقدار Z_L از $-\infty$ به 8- افزایش می یابد. در این گره متغیرهای ۵، ۴، ۳ و ۲ آزادند و جواب جزیی برای گره ۱ که با R_1 نشان داده می شود دارای مقدار ۱ برای x_1 است .

گام ۵ .گره ۱ به علت رسیدن به جواب موجه به عمق می رسد. ضوابط به عمق رسیدن برای گره ۲ را بررسی می کنیم .

ضابطه ۱.

کمتر نیست. پس این ضابطه موجب $Z_L = -8$ گره ۲، صفر بوده است و از z مقدار

به عمق رسیدن گره ۲ نمی شود.

ضابطه ۲.

.امکان پیدا کردن جواب موجه را برای گره ۲ بررسی می کنیم

|-۲| ≮ |-۳ (مجموع ضرایب منفی متغیرهای آزاد برای محدودیت اول)|

|-۴| ≮ |(-۱-۲-۳) (مجموع ضرایب منفی متغیرهای آزاد برای محدودیت دوم)|

طبق این ضابطه گره ۲ به عمق نمی رسد

پس طبق این ضابطه گره ۲ به عمق نمی رسد.

ضابطه ۳و۴ .

چون هم متغیر آزاد وجود دارد و جواب موجه نیز برای این گره به دست نیامده این

گره به عمق نرسیده و فعال است. لذا انشعابهای روی آن ادامه می یابد .

ادامه انشعاب از گره ۲

گام ۳ .طبق ضابطه $x_5, 1$ کنار گذاشته می شود. ضابطه ۲ را برای متغیرهای آزاد ۲، ۳ و ۴ بررسی می کنیم.

$$Z_2 + C_2 \le Z_L \qquad 0 + (-2) \nleq -8$$
$$Z_2 + C_3 \le Z_L \qquad 0 + (-4) \nleq -8$$
$$Z_2 + C_4 \le Z_L \qquad 0 + (-7) \nleq -8$$

پس هیچکدام از متغیرها را طبق این ضابطه نمی توان کنار

گذاشت v_j .ها را محاسبه می کنیم.

$$v_4 = -7 \qquad v_3 = -5 \qquad v_2 = -1$$

لذا انشعاب بر روی v_2 ادامه می یابد. این انشعاب در شکل ۱۳_۱۱ نشان داده شده است .

گردآوری: aharandi@ymail.com

ضابطه ۳ و ۴ـ چون هم متغیر آزاد وجود دارد و جواب موجه نیز براي این گره به دست نیامده این گره به عمق نرسیده و فعال است. لذا انشعاب هاي روي آن ادامه مي یابد.

انشعاب:

ضابطه ۲ را براي متغیرهاي آزاد ۲، ۳ و ۴ بررسي مي کنیم.

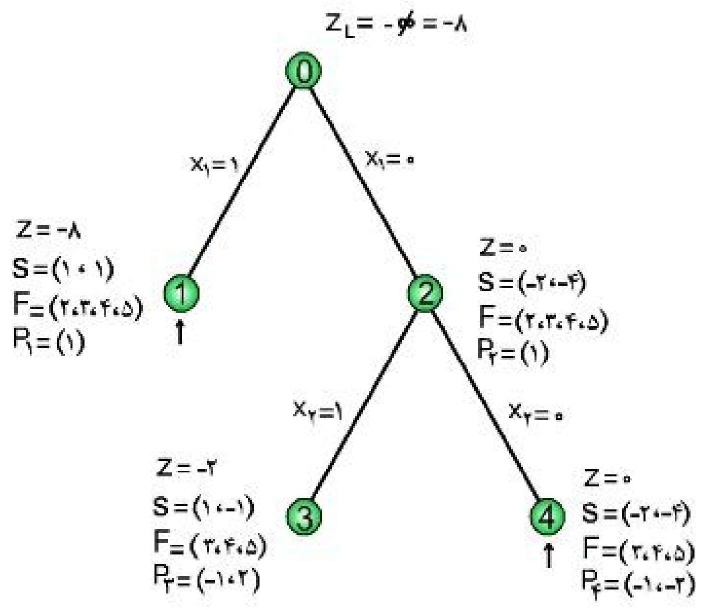
$$Z_2 + C_2 \le Z_L \qquad 0 + (-2) \nleq -8$$
$$Z_2 + C_3 \le Z_L \qquad 0 + (-4) \nleq -8$$
$$Z_2 + C_4 \le Z_L \qquad 0 + (-7) \nleq -8$$

پس هیچکدام از متغیرها را طبق این ضابطه نمي توان کنار گذاشت .

ضابطه Vj3 ها را محاسبه مي کنیم.

x_2

$v_2 = -1 \qquad v_3 = -5 \qquad v_4 = -7$



شکل 3 . دومین انشعاب بر روی X۲

گام ۴ .مشخصات هر گره محاسبه شده و در کنار گره های ۳ و ۴ نوشته شده است. چون جواب این دو گره موجه نیست مقدار Z_L تغییر نکرده و همان (۸ـ) باقی می ماند.

گام ۵ .ضوابط به عمق رسیدن

ضابطه ۱.

مقدار تابع هدف گره ۳، (۲ (z_3 =-بوده و کمتر از Z_L نیست

و

مقدار تابع هدف گره ۴، (۰ (z_4 =بوده و کمتر از Z_L نیست .

لذا طبق این ضابطه هیچکدام از گره های ۳ و ۴ به عمق نمی رسند .

ضابطه ۲ $-۱ \nless |-۲-۱|$.

بررسی گره ۳: چون فقط S_2 منفی است، این ضابطه را برای محدودیت دوم بررسی می کنیم .

بررسی گره ۴ : برای گره ۴، چون هم S_1 و هم S_2 منفی است. این ضابطه برای هر دو محدودیت بررسی می شود .

محدودیت اول

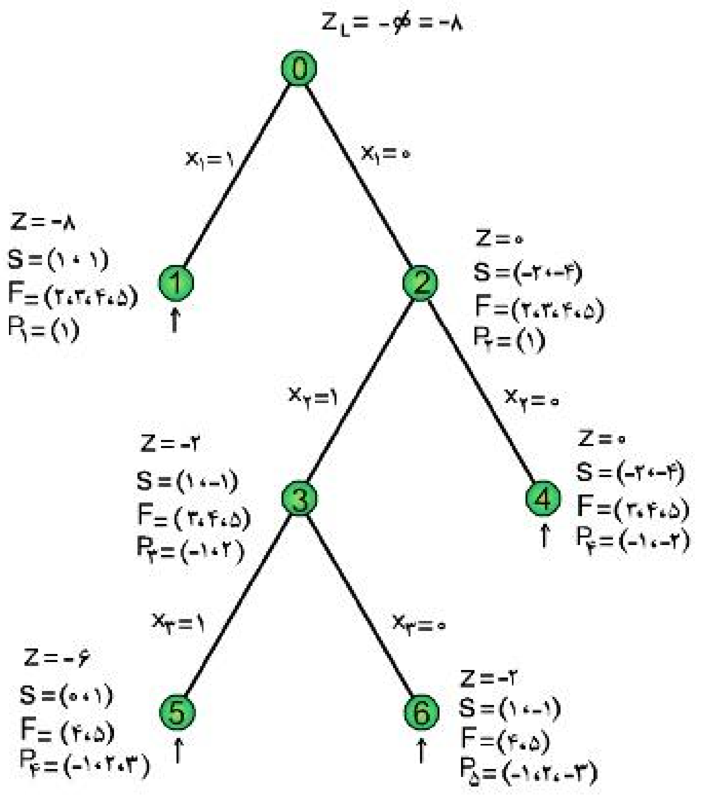
$$|0| < |-2|$$
$$|-2-1| < |-4|$$

با توجه به اینکه ضابطۀ ۲ برای گره ۴ صدق می کند با انشعابهای بیشتر برای این گره، جواب موجه به دست نمی آید و انشعاب به عمق می رسد. گره ۳ هنوز فعال است .ضابطه ۳ و ۴ موجب به عمق رسیدن گره ۳ نمی شوند .

ادامه انشعاب از گره ۳

گام ۳ .متغیرهای آزاد در گره ۳، x_5, x_4, x_3 هستند، که طبق ضابطه ۱، x_5 کنار گذارده شده و طبق ضابطه سوم x_3 انتخاب می شود.

انشعاب به صورت زیر است:



شکل 4 . سومین انشعاب بر روی x_2

گام ۴.

مشخصات گره های محاسبه شد در کنار گره های ۳ و ۴ نوشته شده است. چون فقط جواب گره ۵، موجه و مقدار تابع هدفش بیشتر از $Z_L=-8$ است، مقدار آن با مقدار قبلی Z_L تعویض و $Z_L=-6$ تغییر می یابد .

گام ۵ .

ضوابط به عمق رسیدن گره ۵ چون دارای جوابی موجه است به عمق می رسد. و هیچ کدام از ضوابط برای به عمق رسیدن گره ۶ صدق نمی کند

ادامه انشعاب بررسی گره ۶

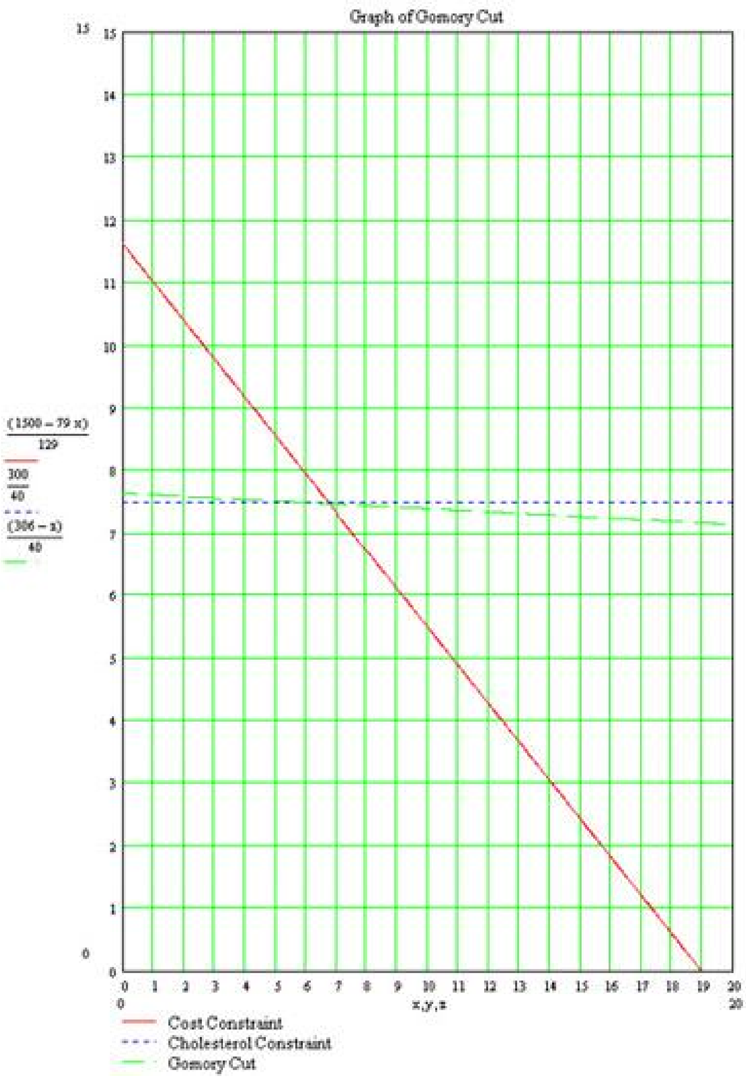
گام ۳ .

متغیر x_5 طبق ضابطه ۱ انشعاب کنار گذارده شده و تنها متغیر آزاد باقی مانده (x_4) با توجه به ضابطه ۲، حذف می شود .

$$z_6 = -2$$
$$Z_6 + C_4 < Z_L$$
$$-2 + (-7) < -6$$

چون رابطه صدق می کند، x_4 کنار گذارده می شود و چون متغیر آزادی برای انشعاب وجود ندارد توقف می کنیم. جواب بهینه مربوط به گره ۵ است که دارای $Z = -6$ و $x_1 = 0$، $x_2 = 1$، $x_3 = 1$، $x_4 = 0$ و $x_5 = 0$ می باشد.

روش گوموری (صفحه برش)Gomory's cut



رالف گوموری یکی از پایه گذاران برنامه ریزی با اعداد صحیح بوده وکمک شایانی به توسعه تکنیکهای حل این گونه مسائل نموده است.

سه روش عمده گوموری که در آنها از محدودیتهای مقطع برای یک برنامه ریزی با اعداد صحیح استفاده می گردد ، عبارتند از:

- روش کسری
- روش برنامه ریزی کامل با اعداد صحیح
- روش برنامه ریزی مخلوط با اعداد صحیح

قبل از تشریح این سه روش ، ابتدا چگونگی محدودیتهایی را که به عنوان مقطع در این روشها مورد استفاده قرار می گیرند نیزبررسی می نماییم .

هر محدودیت زمانی i ام را در یک راه حل پایه ای (برای یک مسئله) می توان به صورت زیر نشان داد:

$$x_{n+i}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i$$

به طوری که a_{ij} نشان دهنده آخرین ضرایب تغییر داده شده برای راه حل پایه ای مورد بحث بوده و متغیر x_{n+i} نیز متغیر پایه ای برای محدودیت i ام است.

محدودیت را ممکن است به صورت زیر بسط داد .

$$x_{n+i} + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots\ldots + a_{in}x_n = b_i$$

اگر علامت کروشه ([ ]) را برای نشان دادن عدد صحیح به کار ببریم ، رابطه فوق را می توان بدین صورت تغییر داد:

$$x_{n+i}+\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}]x_j+\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-[a_{ij}])x_j=[b_i]+(b_i-[b_i])$$

چنانچه کلیه عبارات مربوط به اعداد صحیح را به سمت چپ این رابطه منتقل نمائیم ،

$$x_{n+i}+\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}]x_j-[b_i]=(b_i-[b_i])-\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-[a_{ij}])x_j$$

(توجه شود که عبارت $b_i-[b_i], a_{ij}-[a_{ij}]$ دارای ارزش غیر منفی خواهند بود)

تذکر

ارزش سمت چپ معادله فوق برای یک راه حل اپتیموم یا با اعداد صحیح باید برابر با یک عدد صحیح باشد .

زیرا کلیه ضرایب متغیرهای موجود درآن سمت با اعدادصحیح مشخص می شوند و همچنین ارزش نهایی برای عبارت کسری موجود در سمت راست معادله (به علت متساوی بودن دو طرف آن) باید برابر با یک عدد صحیح گردد

جلسه اول		گردآوری: aharandi@ymail.com

برای سمت راست معادله فوق خواهیم داشت :

$$(b_i - [b_i]) - \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - [a_{ij}])x_j \le (b_i - [b_i])$$

لکن سمت چپ این نامعادله برابر با یک عدد صحیح است ، در حالی که سمت راست آن برابر با یک عدد کسری خواهد بود ، در این صورت اگر یک عدد صحیح باید برابر با یا کوچکتر از یک عدد کسری بشود ، آن عدد صحیح لزوماً باید برابر با صفر یا یک عدد منفی باشد ، یعنی داریم :

$$(b_i - [b_i]) - \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - [a_{ij}])x_j \le 0$$

(نتیجه مذکور را می توان با استفاده از قضیه ۳ موجود در صفحه ۶۲ نیز بدست آورد)

سمت چپ معادله مورد بحث در فوق (به علت متساوی بودن دو طرف آن) نیز باید برابر با یا کوچکتر از صفر باشد .

نامعادله

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - [a_{ij}])x_j \ge ((b_i - [b_i])$$

عبارت از مقطع مورد استفاده در روش کسری گوموری (برای برنامه ریزی با اعداد صحیح) بوده وبر اساس آن می توان محدودیتهای مقطع را برای حل یک مسئله مشخص نمود .

به طور مثال اگر محدودیت i ام برای یک راه حل اپتیموم کسری عبارت باشد از:

$$s_1 + 3/8x_1 - 2/61x_2 - 0/9x_3 + 3x_4 = 5/62$$

یک محدودیت مقطع از این تساوی i ام برای راه حل مزبور به طریق زیر حاصل می گردد :

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - [a_{ij}])x_j \ge (b_i - [b_i])$$

بنابراین داریم :

$$(3/82 - 3)x_1 + (-2/61 - [-3]x_2 + (-0/9 - [-1]x_3 +$$
$$(3-3)x_4 \ge (5/62 - 5)$$

از این رو محدودیت مقطع مورد نظر عبارت است از :

$$0/82x_1 + 0/39x_2 + 0/1x_3 \geq 0/62$$

چنانچه کلیه عبارات مربوط به اعداد صحیح را به سمت چپ این رابطه منتقل نمائیم:

$$x_{n+i} + \sum_{j=1}^{n} [a_{ij}]x_j - [b_i] = (b_i - [b_i]) - \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - [a_{ij}])x_j$$

و در نهایت

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - [a_{ij}])x_j \geq b_i - [b_i]$$

به طور مثال اگر محدودیتی مانند زیر داشته باشیم:

$$s_1 + 3.8x_1 - 2.61x_2 - 0.9x_3 + 3x_4 = 5.62$$

روش کسری گوموری با برنامه ریزی با اعداد صحیح

این روش از نظر طبقه بندی برای یک برنامه ریزی کامل با اعداد صحیح به کار می رود و نقطه شروع تجسس برای یافتن یک راه حل با اعداد صحیح در این روش عبارت از یک راه حل عملی اولیه – مزدوج وکسری برای آن برنامه می باشد .

این روش همچنین مشتمل بر استفاده از محدودیتهایی به نام محدودیتهای مقطع برای مسئله است

اقدامات لازم برای استفاده از روش کسری گوموری در حل یک برنامه ریزی با اعداد صحیح به ترتیب عبارتند از

قدم اول :

مسئله را با استفاده از روش سیمپلکس بدون توجه به ضرورت صحیح بودن ارزش متغیرهای آن نیز حل نمایید.

از این رو یک راه حل اپتیموم (یعنی یک راه حل عملی اولیه – مزدوج) برای مسئله حاصل خواهد شد .

قدم دوم :

چنانچه راه حل حاصل در قدم اول نیز یک راه حل اپتیموم وبااعداد صحیح است ، توقف نمایید ، در غیر این صورت ازقدم سوم استفاده نمایید .

قدم سوم :

ازهر محدودیتی (به انضمام تابع هدف) در راه حل کسری موجود که ارزش $b_i - [b_i]$ برای آن از سایر ارزشهای متناظر موجود بیشتر است نیز یک محدودیت مقطع به دست آورده وآن رابه تابلوی نهایی موجود ضمیمه نمایید (البته از هر محدودیتی که b_i برای آن کسری باشد نیز می توان یک مقطع به دست آورد، لکن محدودیت بابیشترین $b_i - [b_i]$ موجب می شود که مقطع حاصل از آن همواره رسیدن به راه حل نهایی را سرعت بخشد .

قدم چهارم :

حل مسئله را با استفاده از روش سیمپلکس مزدوج ادامه دهید ، تااینکه یک راه حل اپتیموم برای آن حاصل شود ، سپس به قدم دوم باز گردید .

مثال زیر را مورد توجه قرار می دهیم :

$$
\begin{aligned}
&MAXz = 5x_1 + 8x_2 \\
&s.t: \\
&x_1 + x_2 \le 6 \\
&5x_1 + 9x_2 \le 45 \\
&x_1, x_2 \ge 0, \text{int}\, eger
\end{aligned}
$$

با افزودن متغیر های کمبود داریم :

$$
\begin{aligned}
&MAXz = 5x_1 + 8x_2 \\
&s.t: \\
&x_1 + x_2 + s_1 = 6 \\
&5x_1 + 9x_2 + s_2 = 45 \\
&x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0, \text{int}\, eger
\end{aligned}
$$

برای حل مسئله با استفاده از روش سیمپلکس به ترتیب خواهیم داشت :

(تابلوی 1)

	X1	X2	S1	S2	
Z	-5	-8	0	0	0
S1	1	1	1	0	6
S2	5	9	0	1	45

(تابلوی 2)

	S2	S1	X2	X1	
Z	-5/9	0	0	8/9	40
S1	4/9	0	1	-1/9	1
X2	5/9	1	0	1/9	5

(تابلوی 3)

(راه حل عملی اولیه مزدوج راه حل اپتیموم کسری)

	X1	X2	S1	S2	
Z	0	0	5/4	3/4	41/25
X1	1	0	9/4	-1/4	2/25
X2	0	1	-5/4	1/4	3/75

ملاحظه می شود که تابلوی ۳ یک راه حل اپتیموم کسری برای این مسئله ارائه می دهد ، بنا بر این باید اولین محدودیت مقطع را براساس روش کسری گوموری به دست آورده و آن را به تابلوی مزبور ضمیمه نمائیم .

محدودیت دوم در تابلوی ۳ دارای بیشترین ارزش $b_i - [b_i]$ است ، (یعنی 3/75-3=0/75) ، و از این رو اولین مقطع را برای مسئله می توان از این محدودیت نتیجه گیری نمود . محدودیت دوم را در تابلوی ۳ ممکن است بدین صورت نشان داد :

$$x_2 - \frac{5}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 = 3/75$$

محدودیت مقطع بر اساس نامعادله

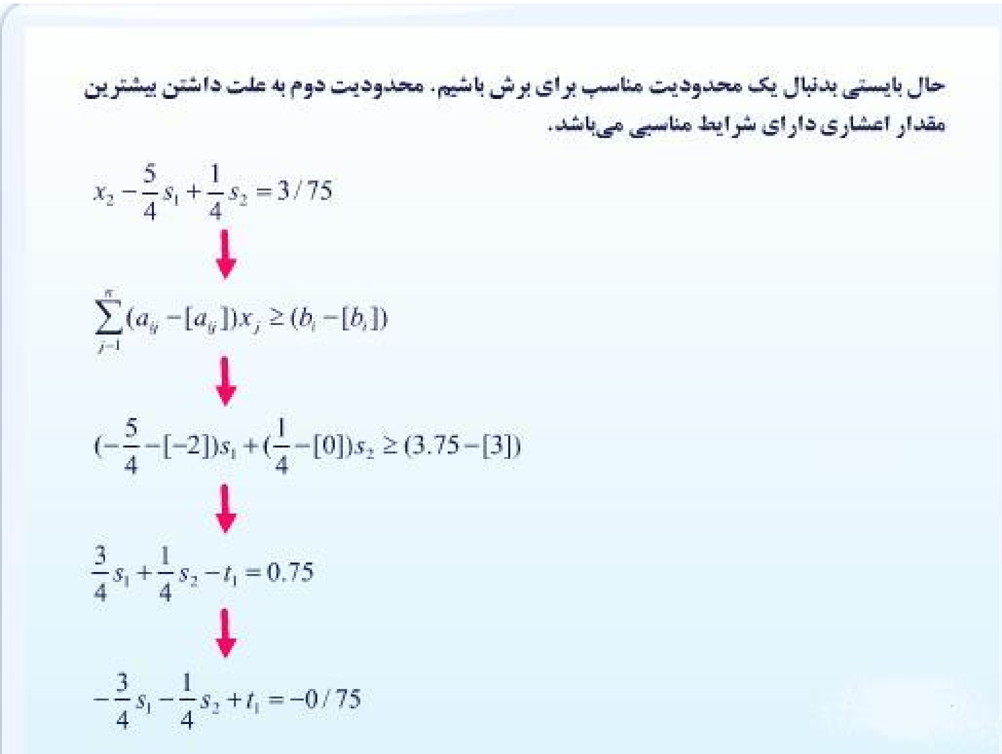
$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - [a_{ij}])x_j \geq (b_i - [b_i])$$

برای محدودیت موجود در فوق بدین قرار خواهد بود :

$$\frac{5}{4} - [-2]s_1 + (\frac{1}{4} - 0)s_2 \geq (3/75 - 3)$$

این محدودیت مقطع را با افزودن متغیر کمبود t 1 به یک معادله تبدیل می نمائیم .

$$\frac{3}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 - t_1 = 0/75$$



حال بایستی بدنبال یک محدودیت مناسب برای برش باشیم. محدودیت دوم به علت داشتن بیشترین مقدار اعشاری دارای شرایط مناسبی می‌باشد.

$$x_2 - \frac{5}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 = 3/75$$

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - [a_{ij}])x_j \geq (b_i - [b_i])$$

$$(-\frac{5}{4} - [-2])s_1 + (\frac{1}{4} - [0])s_2 \geq (3.75 - [3])$$

$$\frac{3}{4}s_1 + \frac{1}{4}s_2 - t_1 = 0.75$$

$$-\frac{3}{4}s_1 - \frac{1}{4}s_2 + t_1 = -0/75$$

محدودیت مقطع حاصل را به تابلوی ۳ ضمیمه نموده و نتیجتاً داریم :

(تابلوی ۴)

	X1	X2	S1	S2	T1	
Z	0	0	5/4	3/4	0	41/25
X1	1	0	9/4	-1/4	0	2/25
X2	0	1	-5/4	1/4	0	3/75
T1	0	0	-3/4	-1/4	1	-0/75

تابلوی ۴ نیز اپتیموم نبوده و آن را با استفاده از روش سیمپلکس مزدوج انتقال می دهیم که در نتیجه خواهیم داشت:

(تابلوی ۵)
(راه حل اپتیموم با اعداد صحیح)

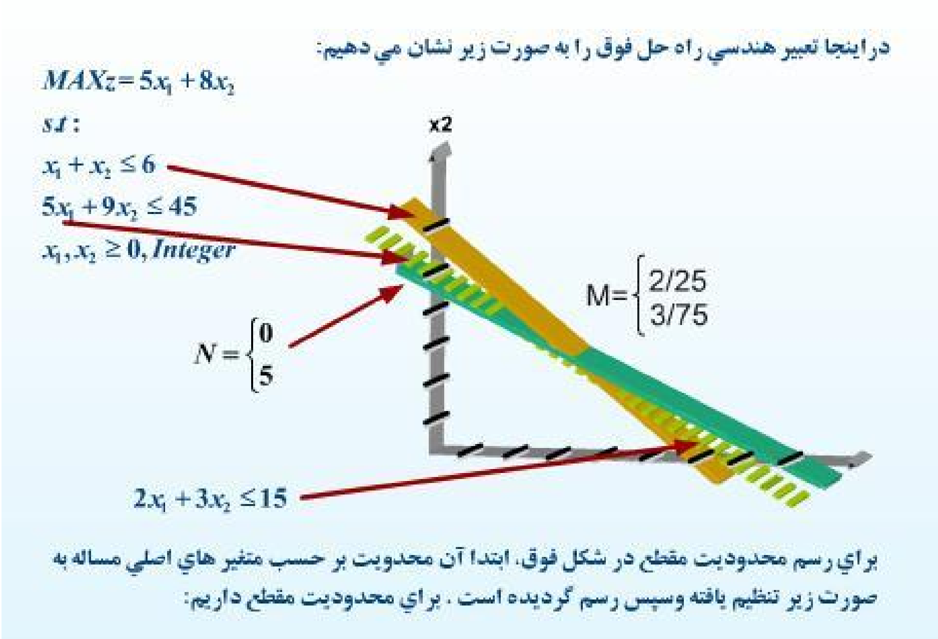
	X1	X2	S1	S2	T1	
Z	0	0	0	1/3	5/3	40
X1	1	0	0	-1	3	0
X2	0	1	0	2/3	-5/3	5
S1	0	0	1	1/3	-4/3	1

تابلوی ۵ نشان دهنده یک راه حل اپتیموم وبا اعداد صحیح است به طوری که برای آن داریم :

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 5$$
$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 0$$
$$t_1 = 0$$
$$Z = 40$$

لازم به یادآوری است که چنانچه تابلوی ۵ باز هم دارای ارزش کسری برای یک یا چند متغیر آن می بود ، به افزودن محدودیتهای مقطع اضافه تری به آن با روشی مشابه ادامه می دادیم تا آنکه راه حلی نهایی و با اعداد صحیح برای مسئله حاصل گردد . دراینجا تعبیر هندسی راه حل فوق را به صورت زیر نشان می دهیم :

ناحیه عملی برای مسئله بدین صورت است :



برای رسم محدودیت مقطع در شکل فوق ، ابتدا آن محدویت بر حسب متغیر های اصلی مسئله به صورت زیر تنظیم یافته وسپس رسم گردیده است برای محدودیت مقطع داریم :

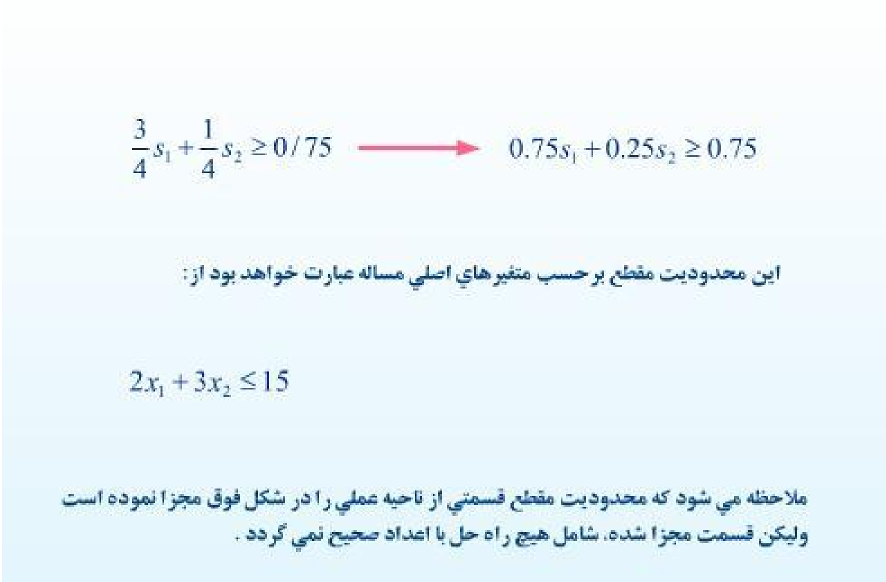
$$\frac{3}{4} s_1 + \frac{1}{4} s_2 \ge 0/75$$

$$0/75\, s_1 + 0/25\, s_2 \ge 0/75$$

این محدودیت مقطع برحسب متغیرهای اصلی مسئله عبارت خواهد بود از :

$$2x_1 + 3x_2 \le 0/75$$

ملاحظه می شود که محدودیت مقطع قسمتی از ناحیه عملی را در شکل فوق مجزا نموده است ولکن قسمت مجزا شده شامل هیچ راه حل با اعداد صحیح نمی گردد .



تکالیف

مسائل زیر را با روش صفحه برش حل نمائید.

-۱

$$\begin{aligned} &MaxZ = x_1 + x_2 \\ &\qquad 2x_1 + 5x_2 \leq 16 \\ &\qquad 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ &x_1, x_2 \geq 0, \text{integer} \end{aligned}$$

-۲

$$\begin{aligned} &MaxZ = 2x_1 + 3x_2 \\ &\qquad x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ &\qquad x_1 + x_2 \geq 3 \\ &x_1, x_2 \geq 0, \text{integer} \end{aligned}$$

گردآوری: *aharandi@ymail.com*