t Ħn♯ · »k± { ♯ Ï IµTeĦ♯ÂºIL¶♯JIT ¨ ♯ÁIµ¹ÀĦn

فصل سوم: احتمال شرطی و استقلال

فصل سوم

احتمال شرطی و استقلال

۱- ۲ تاس منظم پرتاب شده اند احتمال اینکه حداقل یکی از تاس ها عدد ۶ ظاهر شود اگر نتیجه دو تاس متفاوت باشد چقدر است؟

P (حداقل یکی ۶ | هر دو متفاوت) = p (اولی ۶ | دومی غیر ۶) + P (اولی غیر ۶ | دومی ۶)

$$= \frac{P(\text{اولی ۶} \cap \text{دومی غیر ۶})}{P(\text{دومی غیر ۶})} + \frac{P(\text{اولی غیر ۶} \cap \text{دومی ۶})}{P(\text{دومی ۶})} = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

۲- اگر ۲ تاس منظم پرتاب شوند . احتمال شرطی اینکه اولین تاس عدد ۶ ظاهر شود. بشرط اینکه مجموع دو تاس i باشد را بدست آورید. این احتمال را برای i بین ۲ و ۱۲ محاسبه کنید.

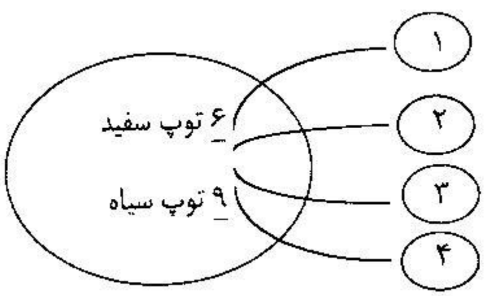
به عنوان مثال :

$$P(\text{اولی ۶} \mid \text{جمع ۷}) = \frac{P(\text{اولی ۶} \cap \text{جمع ۷})}{P(\text{جمع ۷})} = \frac{\frac{۱}{۳۶}}{\frac{۶}{۳۶}} = \frac{۱}{۶}$$

۳- *

۴- *

۵-کیسه ای شامل ۶ توپ سفید و ۹ توپ سیاه است . اگر ۴ توپ را به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب کنیم . احتمال اینکه ۲ توپ انتخاب شده اول سفید و دو توپ انتخاب شده آخر سیاه باشند را بدست آورید.



$$\underbrace{\frac{۶}{۱۵} \times \frac{۵}{۱۴}}_{\text{سفید}} \times \underbrace{\frac{۹}{۱۳} \times \frac{۸}{۱۲}}_{\text{سیاه}} = \frac{۶}{۹۱}$$

۶- ظرفی را در نظر بگیرید که در آن ۱۲ توپ قرار دارد و ۸ تای آن سفید است یک نمونه ۴ تایی را از ظرف با جایگذاری (بدون جایگذاری) انتخاب می کنیم احتمال شرطی اینکه اولین و سومین توپ انتخاب شده سفید باشند بشرط اینکه نمونه انتخاب شده شامل ۳ توپ سفید باشد را بدست آورید. (در هر دو حالت)

الف) با جایگذاری

$$\text{p}(\text{سه تا سفید}|\text{اولی و سومی سفید}) = \frac{P(\text{سه تا سفید} \cap \text{اولی و سومی سفید})}{P(\text{سه تا سفید})} = \frac{۲\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۲}\right)}{۴\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۴}{۱۲}\right)} = \frac{۱}{۲}$$

ب) بدون جایگذاری

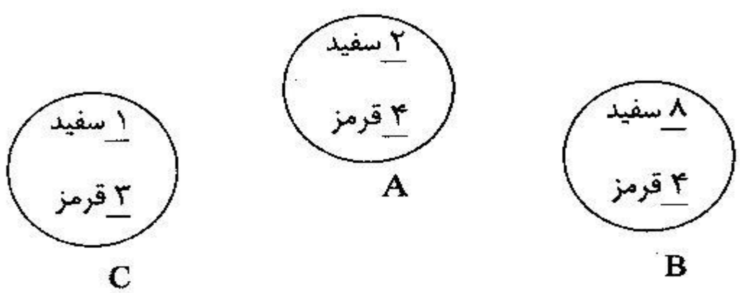
$$\text{P}(\text{سه تا سفید} \mid \text{اولی و سومی سفید}) = \frac{۲\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۱}\times\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۴}{۹}\right)}{۴\left(\frac{۸}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۱}\times\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۴}{۹}\right)} = \frac{۱}{۲}$$

۷- ❄

۸- زوجی دارای ۲ فرزند هستند احتمال اینکه هر دو دختر باشند به شرط اینکه فرزند بزرگتر دختر است را بدست آورید.

$$\text{p}(\text{هر دو دختر} \mid \text{فرزند بزرگتر دختر}) = \frac{p(\text{هر دو دختر} \cap \text{بزرگتر دختر})}{\text{p}(\text{بزرگتر دختر})} = \frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

۹-۳ ظرف را در نظر بگیرید. ظرف A شامل ۲ توپ سفید و ۴ توپ قرمز است، ظرف B شامل ۸ توپ سفید و ۴ توپ قرمز است و در ظرف C یک توپ سفید و ۳ توپ قرمز قرار دارد. اگر یک توپ را به تصادف از هر ظرف انتخاب کنیم، احتمال اینکه توپ انتخاب شده از ظرف A سفید باشد بشرط اینکه ۲ توپ سفید انتخاب شده باشد را بدست آورید.



$$P(\text{توپ انتخابی از طرف A سفید باشد} \mid \text{دو توپ سفید انتخاب شود}) = \frac{p(\text{۲ توپ سفید} \cap \text{توپ انتخابی A سفید})}{p(\text{دو توپ سفید انتخاب شود})}$$

$$= \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{1}\binom{3}{1} + \binom{2}{1}\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{2}{1}\binom{8}{1}\binom{3}{1} + \binom{2}{1}\binom{4}{1}\binom{1}{1} + \binom{4}{1}\binom{8}{1}\binom{1}{1}} = \frac{7}{11}$$

۱۰- *

۱۱- *

۱۲- شانس بارداری غیر طبیعی زنان بارداری که سیگاری هستند دو برابر زنان غیر سیگاری است . اگر ۳۲ درصد از زنهای سن بارداری سیگاری باشند چند درصد از زنهایی که بارداری غیر طبیعی دارند سیگاری هستند؟

$$P(\text{سیگاری بودن} \mid \text{باردار بودن}) = \frac{P(\text{سیگاری} \cap \text{باردار})}{p(\text{باردار})} = \frac{p(\text{باردار} \mid \text{سیگاری})\, p(\text{سیگاری})}{p(\text{باردار} \mid \text{سیگاری})\, p(\text{سیگاری}) + p(\text{باردار} \mid \text{غیر سیگاری})\, p(\text{غیر سیگاری})}$$

$$= \frac{(0.32)(2)}{(0.32)(2) + (0.68)(1)} = 0.4848$$

۱۳- *

۱۴ - در یک محله ۳۶ درصد از خانواده ها یک اتومبیل دارند که ۲۲ درصد از آنها یک دوچرخه هم دارند . ۳۰ درصد از خانواده ها یک دوچرخه ندارند مطلوب است:

الف) احتمال اینکه خانواده ای که به تصادف انتخاب می شود هم اتومبیل و هم دوچرخه داشته باشد.

ب) احتمال شرطی اینکه یک خانواده انتخاب شده اتومبیل داشته باشد بشرط اینکه این خانواده صاحب یک دوچرخه است.

الف) $P(\text{اتومبیل} \cap \text{دوچرخه}) = P(\text{اتومبیل})\, P(\text{دوچرخه} \mid \text{اتومبیل}) = (0.36)(0.22) = 0.0792$

ب) $$P(\text{اتومبیل} \mid \text{دوچرخه}) = \frac{p(\text{دوچرخه} \cap \text{اتومبیل})}{p(\text{دوچرخه})} = \frac{0.0792}{0.3} = 0.264$$

۱۵- در شهری ۴۶ درصد رأی دهندگان خود را در گروه مستقل می پندارنـد در حالیکـه ۳۰ درصد لیبرال و ۲۴ درصد محافظه کـار هسـتند. در یـک انتخابـات محلـی ۳۵ درصـد از گروه مستقل ، ۶۲ درصد لیبرالها و ۵۸ درصد از محافظه کاران رأی داده اند. اگر رأی دهنده را به تصادف انتخاب کنیم و بدانیم که درا نتخابات شرکت کرده است، احتمال اینکه او ،

الف) از گروه مستقل باشد.

ب) از گروه لیبرال باشد.

ج) از گروه محافظه کار باشد.

را بدست آورید.

د) چه نسبتی از رأی دهندگان در انتخابات شرکت داشته اند.

الف)

$$P(\text{مستقل}) = \frac{p(\text{مستقل})\,P(\text{مستقل}\,|\,\text{رای دهد})}{p(\text{مستقل})\,p(\text{رای دهد}\,|\,\text{مستقل}) + p(\text{لیبرال})\,p(\text{رای دهد}\,|\,\text{لیبرال}) + p(\text{محافظه کار})\,p(\text{رای دهد}\,|\,\text{محافظه کار})}$$

$$= \frac{(۰/۴۶)(۰/۳۵)}{(۰/۴۶)(۰.۳۵) + (۰/۳)(۰/۶۲) + (۰/۲۴)(۰/۵۸)} = ۰/۳۳۱$$

ب)
$$P(\text{لیبرال}) = \frac{(۰/۳)(۰/۶۲)}{(۰/۴۶)(۰/۳۵) + (۰/۳)(۰/۶۲) + (۰/۲۴)(۰/۵۸)} = ۰/۳۸۲$$

ج)
$$P(\text{محافظه کار}) = \frac{(۰/۲۴)(۰/۵۸)}{(۰/۴۶)(۰/۳۵) + (۰/۳)(۰/۶۲) + (۰/۲۴)(۰/۵۸)} = ۰/۲۸۶$$

د)
$$[\,p(\text{مستقل})\,p(\text{رای دهد}\,|\,\text{مستقل}) + p(\text{لیبرال})\,p(\text{رای دهد}\,|\,\text{لیبرال}) + p(\text{محافظه})\,P(\text{رای دهد}\,|\,\text{محافظه})] \times ۱۰۰$$

$$= \left[(۰/۴۶)(۰/۳۵) + (۰/۳)(۰/۶۲) + (۰/۲۴)(۰/۵۸)\right] \times ۱۰۰ = ۴۸/۶۲$$

۱۶- *

۱۷- در یـک دانشـکده ،۵۲ درصـد از دانشـجویان زن هسـتند .رشـته اصلـی ۵ درصـد از دانشجویان ایـن دانشـکده کـامپیوتر اسـت ، ۲ درصـد از دانشـجویان زن رشـته اصلـی آنهـا

کامپیوتر است اگر یک دانشجو را به تصادف انتخاب کنیم احتمال شرطی پیشامد های زیر را بدست آورید.

الف) این دانشجو زن باشد بشرط اینکه در رشته کامپیوتر تحصیل کند.

ب) این دانشجو در رشته کامپیوتر تحصیل کند بشرط اینکه دانشجو زن باشد.

الف)
$$P(\text{زن} \mid \text{کامپیوتر}) = \frac{P(\text{زن} \cap \text{کامپیوتر})}{p(\text{کامپیوتر})} = \frac{P(\text{زن} \cap \text{کامپیوتر})}{P(\text{زن} \cap \text{کامپیوتر}) + P(\text{مرد} \cap \text{کامپیوتر})}$$

$$= \frac{(۰/۰۲)}{(۰/۰۳)+(۰/۰۲)} = ۰/۴$$

ب)
$$P(\text{کامپیوتر} \mid \text{زن}) = \frac{P(\text{کامپیوتر} \cap \text{زن})}{p(\text{زن})} = \frac{(۰/۰۲)}{(۰/۵۲)} = \frac{۱}{۲۶}$$

۱۸ - در مورد حقوق روزانه ۵۰۰ زوج ازدواج کرده از آنها سوال کرده ایم . نتیجه اطلاعات بدست آمده در جدول زیر خلاصه شده است یعنی مثلاً در ۳۶ زوج، زن بیشتر از ۲۵۰۰۰ ریال و شوهرش کمتر از آن در آمد دارد . مطلوب است:

زن	شوهر: کمتر از ۲۵۰۰۰ ریال	شوهر: بیش از ۲۵۰۰۰ ریال
کمتر از ۲۵۰۰۰ ریال	۲۱۲	۱۹۸
بیش از ۲۵۰۰۰ ریال	۳۶	۵۴

الف) احتمال اینکه یک شوهر کمتر از ۲۵۰۰۰ ریال در آمد داشته باشد.

ب) احتمال شرطی اینکه زن بیش از ۲۵۰۰۰ ریال در آمد داشته باشد بشرط اینکه شوهر او نیز بیش از این مبلغ در آمد داشته باشد.

ج) احتمال شرطی اینکه زن بیش از ۲۵۰۰۰ ریال در آمد داشته باشد بشرط اینکه شوهر او کمتر از این مبلغ در آمد داشته باشد.

الف)
$$P(\text{یک شوهر کمتر از ۲۵۰۰۰ درآمد داشته باشد}) = \frac{۳۶}{۵۰۰}+\frac{۲۱۲}{۵۰۰} = ۰/۴۹۶$$

ب)
$$P(\text{مرد بیشتر / زن بیشتر}) = \frac{P(\text{مرد بیشتر} \cap \text{زن بیشتر})}{p(\text{مرد بیشتر} \cap \text{زن بیشتر}) + p(\text{مرد بیشتر} \cap \text{زن کمتر})} = \frac{۳}{۱۴}$$

ج)
$$P(\text{مرد کمتر / زن بیشتر}) = \frac{P(\text{مرد کمتر} \cap \text{زن بیشتر})}{p(\text{مرد کمتر} \cap \text{زن بیشتر}) + p(\text{مرد کمتر} \cap \text{زن کمتر})} = \frac{۹}{۶۲}$$

۱۹- احتمال اینکه یک باطری نو بیش از ۱۰۰۰۰ مایل کار کند برابر با ۰/۸ و احتمال اینکه بیش از ۲۰۰۰۰ مایل کار کند برابر با ۰/۴ و احتمال اینکه بیش از ۳۰۰۰۰ مایل کارکند برابر است با ۰/۱ است . اگر باطری نو یک اتومبیل بعد از ۱۰۰۰۰ مایل هنوز کار کند . مطلوب است احتمال پیشامد های زیر:

الف) طول عمر این باطری بیش از ۲۰۰۰۰ مایل باشد.

ب) بقیه طول عمر آن بیش از ۲۰۰۰۰ مایل باشد.

الف) A= پیشامد اینکه طول عمر باطری بیش از ۲۰/۰۰۰ مایل باشد.

B = پیشامد اینکه باطری نو بعد از ۱۰/۰۰۰ مایل هنوز کار کند.

$$p(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۴}{۰/۸} = \frac{۱}{۲}$$

ب) C = پیشامد اینکه بقیه طول عمر آن بیش از ۲۰/۰۰۰ مایل باشد.

$$p(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{۰/۱}{۰/۸} = \frac{۱}{۸}$$

۲۰- *

۲۱ - از ظرفی که ۵ توپ سفید و ۷ توپ سیاه دارد هر مرتبه توپی را به تصادف انتخاب کرده ، رنگ آن را یادداشت نموده و همراه دو توپ هم رنگ دیگر در ظرف برمی گردانیم احتمال پیشامد های زیر را محاسبه کنید.

الف) دو توپ انتخاب شده اول سیاه و دو توپ بعدی سفید باشند.

ب) از چهار توپ انتخاب شده اول ۲ توپ سیاه انتخاب شده باشد

الف)

$$P\,(\text{دو توپ اول سیاه و دو توپ بعدی سفید}) = \frac{۷}{۱۲}\times\frac{۹}{۱۴}\times\frac{۵}{۱۶}\times\frac{۷}{۱۸} = \frac{۳۵}{۷۶۸}$$

ب) انتخاب توپها به صورت زیر خواهد بود:

$$BBBB + BBBW + BBWB + BWBB + WBBB + BBWW$$

$$+BWBW + BWWB + WBWB + WWBB + WBBW$$

$$P(\text{کل}) = (\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۹}{۱۴}\times\frac{۱۱}{۱۶}\times\frac{۱۳}{۱۸}) + \cdots + (\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۴}\times\frac{۹}{۱۶}\times\frac{۷}{۱۸}) = ۰/۷۴۶$$

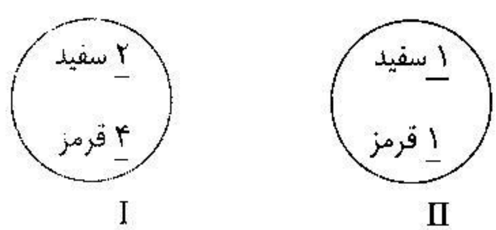
۲۲- ظرف I شامل ۲ توپ سفید و ۴ توپ قرمز است و ظرف II شامل ۱ توپ سفید و یک توپ قرمز است .یک توپ را به تصادف از ظرف I انتخاب نموده و در ظرف II قرار میدهیم و سپس یک توپ از ظرف II انتخاب می کنیم احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید

الف) توپ انتخاب شده از ظرف II سفید باشد.

ب) توپ منتقل شده سفید باشد بشرط اینکه توپ انتخاب شده از طرف II سفید باشد.

الف)
$$p\,(\text{توپ انتخابی از ظرف II سفید باشد}) = \left(\frac{۲}{۶}\times\frac{۲}{۳}\right) + \left(\frac{۴}{۶}\times\frac{۱}{۳}\right) = \frac{۴}{۹}$$

ب)
$$p\,(\text{توپ منتقل شده سفید | توپ انتخابی از ظرف II سفید}) = \frac{\frac{۲}{۶}\times\frac{۲}{۳}}{\left(\frac{۲}{۶}\times\frac{۲}{۳}\right) + \left(\frac{۴}{۶}\times\frac{۱}{۳}\right)} = \frac{۱}{۲}$$



۲۴ - هر یک از دو توپ را سیاه یا طلایی رنگ زده و در یک ظرف قرار می دهیم فرض کنید احتمال اینکه توپ سیاه رنگ شود $\frac{۱}{۲}$است و توپها مستقل از یکدیگر رنگ شوند.

الف) اگر بدانیم که رنگ طلائی استفاده شده (حداقل یک توپ طلائی رنگ زده شده است) احتمال شرطی اینکه هر دو توپ طلائی رنگ شده باشند را بدست آورید.

ب) فرض کنید که ظرف کج شده و یک توپ از آن خارج شود و رنگ آن طلائی باشد در این حالت احتمال اینکه هر دو توپ طلائی باشند چقدر است؟ شرح دهید.

الف) A = پیش آمد اینکه هر دو طلایی ، B = پیش آمد اینکه از رنگ طلایی استفاده شود.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\text{هر دو طلایی}}{\text{یکی طلایی + یکی طلایی + هر دو طلایی}}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}}{\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)}=\frac{۱}{۳}$$

ب)

$$P(\text{دومی طلایی | اولی طلایی})=\frac{P(\text{اولی طلایی}\cap\text{دومی طلایی})}{P(\text{اولی طلایی})}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

۲۵- *

۲۶- تصور کنید که ۵ درصد مردان و ۰.۲۵ درصد از زنان بیمار کور رنگی دارند. اگر یک فرد کور رنگ را به تصادف انتخاب کنیم احتمال اینکه این فرد مرد باشد چقدر است؟ فرض کنید تعداد مردها و زنها برابر باشند. اگر تعداد مردها دو برابر تعداد زنها باشد پاسخ چیست؟

قسمت اول) A = پیشامد اینکه مرد باشد ، B = پیش آمد اینکه کوررنگ باشد.

$$p(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۰۵}{۰/۰۵+۰/۰۰۲۵}=\frac{۲۰}{۲۱}$$

قسمت دوم)

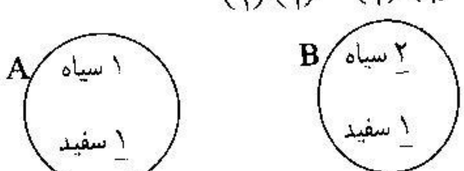
$$p(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۲(۰/۰۵)}{۲(۰/۰۵)+۰/۰۰۲۵}=\frac{۴۰}{۴۱}$$

۲۷- دو جعبه را در نظر بگیرید که در یکی از آنها یک مهره سیاه و یک مهره سفید و در دیگری ۲ مهره سیاه و یک مهره سفید قرار دارد یک جعبه را به تصادف انتخاب می کنیم و یک مهره را به تصادف از آن بیرون می آوریم احتمال اینکه این مهره سیاه باشد را بدست آورید. اگر مهره انتخاب شده سفید باشد احتمال اینکه از جعبه اول انتخاب شده باشد را بدست آورید.

قسمت اول)

$$P(\text{مهر سیاه باشد})=p(\text{سیاه باشد}\,|\,\text{جعبه } A)\,p(A)+p(\text{سیاه}\,|\,B)\,p(B)$$

$$=\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۷}{۱۲}$$



قسمت دوم)

$$P(A\,|\,\text{سفید})=\frac{P(A\cap\text{سفید})}{P(\text{سفید})}=\frac{P(A\cap\text{سفید})}{p(\text{سفید}\,|\,A)\,p(A)+p(\text{سفید}\,|\,B)\,p(B)}$$

$$=\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)}{\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}\right)}=\frac{۳}{۵}$$

۲۸- لغت (سختی یا شدت) را آمریکایی ها بصورت *rigour* و انگلیسی ها بصورت *rigor* می نویسند .مردی که در یک هتل اقامت دارد، این لغت را می نویسد . یکی از حروف آن را به تصادف انتخاب کرده و مشاهده میکنیم که حرف صدا دار است . اگر ۴۰ درصد افراد ساکن در این هتل انگلیسی و ۶۰ درصد آمریکایی باشند، احتمال اینکه نویسنده لغت انگلیسی باشد را بدست آورید.

A = پیشامد اینکه حرف انگلیسی باشد ، B = پیشامد اینکه صدادار باشد.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\binom{۳}{۶}(۰/۴)}{\binom{۳}{۶}(۰/۴)+\binom{۲}{۵}(۰/۶)}=\frac{۵}{۱۱}$$

۲۹- ظرف A شامل ۲ توپ سفید و یک توپ سیاه است و درظرف B ، ۱ توپ سفید و ۵ توپ سیاه قرار دارد یک توپ را به تصادف از ظرف A انتخاب کرده آن را در B قرار می دهیم.آنگاه یک توپ از ظرف B انتخاب می کنیم ، توپ انتخاب شده سفید است. احتمال اینکه توپ منتقل شده نیز سفید بوده باشد را بدست آورید.

A = پیشامد اینکه توپ منتقل شده سفید باشد ، B = پیشامد اینکه توپ سفید انتخاب شود.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\binom{۲}{۳}\binom{۲}{۷}}{\binom{۲}{۳}\binom{۲}{۷}+\binom{۱}{۳}\binom{۱}{۷}}=\frac{۴}{۵}$$

۳۰- در مثال ۳-۵ فرض کنید شواهد جدیدی بستگی به تفسیر آن دارد و فقط ۹۰ درصد محتمل است که متهم این خصوصیت را داشته باشد. در این حالت احتمال اینکه متهم گناهکار باشد را حساب کنید.

A = پیشامد اینکه متهم گناهکار باشد ، B = پیشامد اینکه دارای ویژگی باشد.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A)+P(B/A')P(A')}=\frac{(۰/۹)(۰/۶)}{(۰/۹)(۰/۶)+(۰/۲)(۰/۴)}$$

$$=\frac{۲۷}{۳۱}$$

۳۱ -در یک کلاس احتمال با ۳۰ دانشجو، وضعیت درس بدین صورت است که ۱۵ نفر خوب، ۱۰ نفر متوسط، و ۵ نفر ضعیف هستند. شما (بعنوان یک کارشناس) از اعداد فوق اطلاع دارید ولی نمی دانید که کدام کلاس چنین وضعیت هایی را دارند. اگر یک دانشجو را به تصادف از هر کلاس انتخاب و آزمایش ساده نموده و مشاهده کنید که دانشجوی

انتخابی از کلاس A متوسط و دانشجوی انتخابی از کلاس B ضعیف است. احتمال اینکه کلاس A کلاس برتر باشد چقدر است؟

A = پیشامد اینکه **A** کلاس برتر ، **B** = پیشامد اینکه **B** کلاس برتر ، **P** = پیشامد اینکه فرد انتخاب شده از کلاس **A** متوسط ، **q** = پیشامد اینکه فرد انتخاب شده از کلاس **B** ضعیف

$$P(A|P,q)=\frac{P(A\cap P,q)}{P(P,q)}=\frac{P(P,q/A)P(A)}{P(P,q/A)P(A)+P(P,q/B)P(B)}=?$$

$$=\frac{\binom{۱۰}{۳۰}\binom{۱۵}{۳۰}}{\binom{۱۰}{۳۰}\binom{۱۵}{۳۰}+\binom{۱۰}{۳۰}\binom{۵}{۳۰}}=\frac{۳}{۴}$$

۳۲ - فروشگاههای A، B و C بترتیب ۵۰، ۷۵ و ۱۰۰ نفر کارمند دارند از این کارمندان بترتیب ۵۰٪ ، ۶۰٪ ، و ۷۰٪ زن هستند. اگر امکان استعفا بین کارمندان یکسان باشد و یک کارمند زن استعفا دهد، با چه احتمالی وی کارمند فروشگاه C است؟

الف) **W**= پیشامد زن بودن ، **A** = پیشامد کارمند **A** بودن ،

B = پیشامد کارمند **B** بودن ،

C = پیشامد کارمند **C** بودن .

$$P(C|W)=\frac{P(C\cap W)}{P(W)}=\frac{P(W/C)P(C)}{P(W/A)P(A)+P(W/B)P(B)+P(W/C)P(C)}=\frac{۱}{۲}$$

۳۳ - الف) فردی در جیب خود یک سکه سالم و یک سکه که دو طرفش شیر است نگه می دارد. او یکی از سکه ها را به تصادف انتخاب و آن را پرتاب می کند، اگر شیر ظاهر شود با چه احتمالی سکه سالم انتخاب شده است؟

ب) فرض کنید وی همان سکه را یک مرتبه دیگر پرتاب کند و دوباره شیر ظاهر شود. حال احتمال اینکه این سکه سالم باشد چقدر است؟

A = پیشامد سالم بودن سکه ، **A'** = پیشامد ناسالم بودن سکه ،

B = پیشامدن ظاهر شدن شیر

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A)+P(B/A')P(A')}=\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)}{\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\right)+۱\times\left(\frac{۱}{۲}\right)}=\frac{۱}{۳}$$

ب) چون دو آزمایش مستقل هستند و نتیجه هر یک در دیگری اثری ندارد داریم:

$$P\,(\text{در مرتبه دوم هم شیر ظاهر شود})=\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۹}$$

۳۴ - ظرف A، ۵ توپ سفید و ۷ توپ سیاه دارد، در ظرف B نیز ۳ توپ سفید و ۱۲ توپ سیاه قرار دارد. سکه ای را پرتاب کرده اگر شیر ظاهر شود یک توپ از ظرف A و اگر خط ظاهر شود یک توپ از ظرف B انتخاب می کنیم. فرض کنید که توپ انتخاب شده سفید باشد، احتمال اینکه سکه خط آمده باشد را بدست آورید.

$$P(\text{خط}\mid\text{سفید})=\frac{P(A\cap\text{سفید})}{P(\text{سفید})}=\frac{P(\text{سفید}\mid\text{خط})P(\text{خط})}{p(\text{سفید}\mid\text{خط})\,p(\text{خط})+p(\text{سفید}\mid\text{شیر})\,p(\text{شیر})}$$

$$=\frac{\left(\frac{۳}{۱۵}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)}{\left(\frac{۳}{۱۵}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۵}{۱۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)}=\frac{۱۲}{۳۷}$$

۳۶ - یک نمونه ۳ تایی انتخاب شده بصورت زیر را در نظر بگیرید : از ظرفی که ۵ توپ سفید و ۷ توپ قرمز دارد در هر مرحله یک توپ به تصادف انتخاب نموده رنگ آن را یادداشت و آن را همراه با یک توپ از همان رنگ به ظرف باز می گردانیم احتمال اینکه نمونه، شامل I توپ سفید باشد را بدست آورید.

$(i=۰$ و ۱ و ۲ و ۳$)$

$$P(i=۰)=\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۹}{۱۴}=\frac{۳}{۱۳}$$

چون ممکن است بار اول، دوم و یا سوم انتخاب شود.

$$P(i=۱)=\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۷}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۴}=\frac{۵}{۳۹}$$

داریم:

$$P(i=۱) = ۳ \times \frac{۵}{۳۹} = \frac{۵}{۱۳}$$

$$P(i=۲) = \left(\frac{۵}{۱۲} \times \frac{۶}{۱۳} \times \frac{۷}{۱۴}\right) + \left(\frac{۵}{۱۲} \times \frac{۷}{۱۳} \times \frac{۶}{۱۴}\right) + \left(\frac{۷}{۱۲} \times \frac{۵}{۱۳} \times \frac{۶}{۱۴}\right) = \frac{۱۵}{۵۲}$$

$$P(i=۳) = \left(\frac{۵}{۱۲} \times \frac{۶}{۱۳} \times \frac{۷}{۱۴}\right) + \left(\frac{۵}{۱۲} \times \frac{۶}{۱۳} \times \frac{۷}{۱۴}\right) + \left(\frac{۵}{۱۲} \times \frac{۶}{۱۳} \times \frac{۷}{۱۴}\right) = \frac{۱۵}{۵۲}$$

۳۷ - ظرفی شامل b توپ سیاه و r توپ قرمز است. یکی از توپها را به تصادف انتخاب می کنیم اما وقتی که آن را به ظرف برمی گردانیم c توپ دیگر از همان رنگ را نیز در ظرف میَ گذاریم حال فرض کنید توپ دیگری را انتخاب می کنیم. نشان دهید، احتمال اینکه توپ انتخاب شده اول سیاه بوده بشرط اینکه توپ دوم قرمز باشد برابر است $\frac{b}{b+r+c}$

$$P(\text{اول سیاه}|\text{دوم قرمز}) = \frac{P(\text{اول سیاه} \cap \text{دوم قرمز})}{P(\text{دوم قرمز})} = \frac{P(\text{دوم قرمز}|\text{اول سیاه})P(\text{اول سیاه})}{P(\text{دوم قرمز}|\text{اول سیاه})P(\text{اول سیاه}) + P(\text{دوم قرمز}|\text{اول قرمز})P(\text{اول قرمز})}$$

$$= \frac{\left(\frac{b}{b+r}\right)\left(\frac{r}{b+r+c}\right)}{\left(\frac{b}{b+r}\right)\left(\frac{r}{b+r+c}\right) + \left(\frac{b}{b+r}\right)\left(\frac{r+c}{b+r+c}\right)} = \frac{b}{b+r+c}$$

۳۹ - سه آشپز A، B و C هر کدام کیک خاصی را تهیه میکنند که با احتمال های ۰/۰۲ ، ۰/۰۳، ۰/۰۵ کیک آنها هنگام پخت خراب می شود. اگر در رستورانی که آنها کار می کنند، آشپز A ۵۰ درصد، آشپز B ۳۰ درصد و آشپز C ۲۰ درصد از کیک ها را پخت کنند، چه نسبتی از کیک های خراب توسط آشپز A تهیه می شود.

A و **B** و **C** = پیشامدهای تهیه کیک توسط آشپزهای **A** و **B** و **C** ، **R** = پیشامد خراب شدن کیک

$$P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{P(R/A)P(A)}{P(R/A)P(A) + P(R/B)P(B) + P(R/C)P(C)}$$

$$= \frac{(۰/۰۲)(۰/۵)}{(۰/۰۲)(۰/۵) + (۰/۰۳)(۰/۳) + (۰/۰۵)(۰/۲)} = \frac{۱۰}{۲۹}$$

نسبت مورد نظر عبارت است از :

$p(A \mid R) \times ۱۰۰ = ۳۴/۴۸$

۴۰- در جعبه ای سه سکه وجود دارد که یکی از آنها هر دو طرف شیر، دیگری یک سکه سالم و سومی سکه ای اریب است که هنگام پرتاب با احتمال ۰/۷۵ شیر ظاهر می شود. وقتی که یکی از سکه ها را به تصادف انتخاب کرده و پرتاب می کنیم، شیر ظاهر می شود. احتمال اینکه سکه دو طرف شیر انتخاب شده باشد چقدر است؟

A = پیشامد اینکه دو طرف شیر باشد ، B = پیشامد اینکه شیر ظاهر شود.

C = پیشامد اینکه سکه سالم باشد ، D = پیشامد اینکه سکه با ۰/۷۵ شیر انتخاب شود.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|C)P(C)+P(B|D)P(D)}$$

$$=\frac{(۱)(\frac{۱}{۳})}{(۱)(\frac{۱}{۳})+(\frac{۱}{۲})(\frac{۱}{۳})+(\frac{۳}{۴})(\frac{۱}{۳})}=\frac{۴}{۹}$$

۴۱- *

۴۲- فرض کنید ۱۰ سکه داریم که اگر سکه iام را پرتاب کنیم با احتمال $\frac{i}{۱۰}$ ($i=۱,\dots,۱۰$) شیر ظاهر می شود وقتی که یکی ازسکه ها را به تصادف انتخاب کرده و آن را پرتاب می کنیم شیر ظاهر می شود. احتمال شرطی اینکه این سکه، پنجمین سکه باشد را بدست آورید.

$$P(\text{سکه پنجم} \mid \text{شیر ظاهر می شود})=\frac{P(\text{سکه پنجم}\cap\text{شیر ظاهر می شود})}{P(\text{شیر ظاهر می شود})}=\frac{\frac{۵}{۱۰}}{\frac{۱}{۱۰}+\frac{۲}{۱۰}+\dots+\frac{۱۰}{۱۰}}$$

$$=\frac{۱}{۱۱}$$

۴۳- *

۴۴ – دو کمد یکسان هر کدام دارای دو کشو هستند در هر یک از کشوهای کمد A یک سکه نقره وجود دارد، اما در یکی از کشوهای کمد B یک سکه طلا و در کشوی دیگر آن یک سکه نقره است . یکی از کمدها را به تصادف انتخاب نموده و یکی از کشوهای آن را باز می کنیم و یک سکه نقره بدست می آوریم. احتمال اینکه در کشوی دیگر این کمد یک سکه نقره باشد چقدر است؟

کمد A	نقره	نقره
کمد B	نقره	طلا

M = پیشامد اینکه اولین سکه نقره باشد.

N = پیشامد اینکة دومین سکه نقره باشد

A و B = پیشامدهای اینکه سکه انتخابی از کمدهای A و B باشند.

$$P(N|M)=\frac{P(N\cap M)}{P(M)}=\frac{P(M|A)P(A)}{P(M|A)P(A)+P(M|B)P(B)}$$

بدیهی است که :

$$P(M|N)P(N)=P(M|A)P(A)$$

چون در کمد Aهر دو کشو دارای سکه نقره هستند.

$$P(N|M)=\frac{(1)(\frac{1}{2})}{(1)(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}$$

۴۵- فرض کنید آزمایش مبتلا به بیماری سرطان برای کسانی که بیماری دارند و کسانی که سالم هستند دارای دقت ۰/۹۵ باشد. اگر ۰/۴ درصد افراد جامعه دارای بیماری سرطان باشند، مطلوب است احتمال اینکه فردی که مورد آزمایش قرار گرفته دارای بیماری سرطان باشد بشرط اینکه نتیجه ازمایش مثبت باشد.

$$P(\text{سرطان} \mid \text{مثبت})=\frac{P(\text{مثبت}\cap\text{سرطان})}{P(\text{مثبت})}=\frac{(0/004)(0/95)}{(0/004)(0/95)+(0/996)(0/05)}=\frac{19}{268}$$

۴۶ – تصور کنید که یک موسسه بیمه افراد جامعه را به سه گروه افراد با ریسک بالا افراد با ریسک متوسط و افراد با ریسک پایین تقسیم بندی نموده و اطلاعات وی نشان می دهد

که احتمال تصادف کردن این گروه ها در طول یکسال بترتیب ۰/۰۵ و ۰/۳۰ است. اگر ۲۰ درصد افراد جامعه ریسک بالا، ۵۰ درصد ریسک متوسط و ۳۰ درصد ریسک پایین باشند. چه نسبتی از افراد جامعه در یکسال تصادف دارند؟ اگر فرد بیمه شده A در یک سال تصادف نداشته باشد، احتمال اینکه وی ازگروه با ریسک متوسط باشد را بدست آورید.

قسمت اول)　　P (تصادف) =(۰/۰۵)(۰/۲)+(۰/۱۵)(۰/۵)+(۰/۳)(۰/۳)=۰/۱۷۵

نسبت مورد نظر عبارت است از :　　٪۱۷۵ ×۱۰۰ =۱۷/۵

قسمت دوم)　A = پیشامد اینکه مرد از گروه باریسک متوسط باشد،

B = پیشامد اینکه در یک سال تصادف نداشته باشد.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{(۰/۵)(۰/۸۵)}{(۰/۲)(۰/۹۵)+(۰/۵)(۰/۸۵)+(۰/۳)(۰/۷)}=\frac{۱۷}{۳۳}$$

۴۷- *

۴۸ - در یک کلاس ۴ دانشجوی پسر سال اول ، ۶ دانشجوی دختر سال اول و ۶ دانشجوی پسر سال دوم ثبت نام کرده اند. چند دانشجوی دختر سال دوم بایستی در این کلاس ثبت نام کنند تا در صورت انتخاب یک دانشجو به تصادف ، پیشامد های جنس و سال تحصیلی مستقل باشند؟

سال اول	سال دوم
۴ پسر	۶ پسر
۶ دختر	X دختر

$$\frac{۶}{۱۰}=\frac{X}{۶+X}$$
$$\Rightarrow \boxed{X=۹}$$

۴۹- *

۵۰ - یک مدل ساده برای تغییرات نرخ سهام بازار بورس بدین ترتیب است که در هر روز، نرخ سهام یک واحد با احتمال P افزایش و با احتمال $1-P$ کاهش می یابد . همچنین در روزهای مختلف مستقلند.

الف) احتمال اینکه بعد از دو روز نرخ سهام همان قیمت اولیه باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه بعد از ۳ روز نرخ سهام به اندازه ۱واحد افزایش یافته باشد چقدراست؟

ج) بشرط اینکه بعد از ۳ روز نرخ سهام یک واحد افزایش یافته باشدبا چه احتمالی در اولین روز یک واحد افزایش داشته است؟

الف) $P\text{(نرخ سهام ثابت)} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$

ب) (با رسم نمودار درختی) $P\text{(یک واحد افزایش)} = \frac{۳}{۸}$

ج) A - پیشامد اینکه در اولین روز یک واحد افزایش داشته باشیم.

B - پیشامد اینکه بعد از سه روز یک واحد افزایش داشته باشیم.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{۲}{۸}}{\frac{۳}{۸}} = \frac{۲}{۳}$$

۵۱ - رنگ چشم یک انسان بوسیله یک زوج ژن تعیین میشود بطوریکه اگر هر دو ژن چشم ، آبی باشند رنگ چشم فرد آبی و اگر هر دو ژن چشم، قهوه ای باشند رنگ چشم فرد قهوه ای و اگر یک ژن آبی و یک ژن قهوه ای باشد رنگ چشم قهوه ای خواهد بود(به این دلیل که رنگ قهوه ای غالب است) یک نوزاد یک ژن را به طور مستقل از مادر و ژن دیگر را از پدر می گیرد، که بطور هم شانس میتواند ژن آبی یا ژن قهوه ای باشد. فرض کنید فردی والدین او دارای چشم قهوه ای هستند ولی خواهر آن فرد چشم آبی دارد.

الف) با چه احتمالی آن فرد مالک ژن چشم آبی است.

فرض کنید همسر آن چشم آبی باشد.

ب) احتمال اینکه اولین فرزند آنها چشم آبی باشد چقدر است؟

ج) اگر اولین فرزند آنها چشمان قهوه ای داشته باشد با چه احتمالی فرزند بعدی آنها نیز چشم قهوه ای خواهد داشت.

الف) با رسم نمودار درختی مشاهده میشود که :

$$P\,(\text{ژن آبی}) = \frac{۲}{۳}$$

ب) A = پیشامد اینکه ژن آبی از مادر باشد، B = پیشامد اینکه ژن آبی از پدر باشد.

$$P(B) = \left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۳}\right)(۰)$$

$$= \frac{۱}{۳}$$

$$P(A) = ۱$$

$$P\,(\text{فرزند اول چشم آبی باشد}) = P(A)P(B) = (۱)(\frac{۱}{۳}) = \frac{۱}{۳}$$

ج) A = پیشامد اینکه فرزند اول چشم قهوهٔ ای

B = پیشامد اینکه فرزند دوم چشم قهوه ای

C = پیشامد اینکه پدر (فرد) چشم قهوه ای باشد.

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B|C)P(C)}{P(A|C)P(C)} = \frac{\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)}{\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)} = \frac{۳}{۴}$$

۵۲ – فرد A و B برای تیر اندازی مسابقه می دهند. فرض کنید هر شلیک A بـا احتمـال P_1 به هدف اصابت کند و هر شلیک B با احتمال P_2 به هدف بخورد. بعلاوه فـرض کنیـد آنهـا بطور همزمان بطرف یک هدف تیر اندازی می کنند اگر تیری به هدف خورده باشد مطلوب است:

الف)احتمال اینکه هر دو تیر به هدف خورده باشند.

ب) تیر A به هدف خورده باشد

چه فرض استقلالی را در نظر گرفته اید.

الف) $$P\,(\text{هر دو به هدف خورده باشد}) = \frac{P_۱P_۲}{P_۱P_۲ + P_۱(۱-P_۲) + P_۲(۱-P_۱)}$$

ب) $$P\,(\text{تیر A به هدف خورده باشد}) = \frac{P_۱P_۲ + P_۱(۱-P_۲)}{P_۱P_۲ + P_۱(۱-P_۲) + P_۲(۱-P_۱)}$$

۵۳- *

۵۴- در یک مسابقه خانوادگی قرار است یک سوال به یک زوج داده شود که پاسخ آن ((صحیح)) یا ((غلط)) است . اگر زن و شوهر بطور مستقل پاسخ مناسب رابااحتمال P بدهند .کدامیک از حالات زیر برای برنده شدن زوج بهتر است؟

الف) یکی از آنها را انتخاب واجازه دهیم او پاسخ دهد.

ب)هر دو نفر سوال را بررسی نموده و پس از توافق ، یکی از آنها پاسخ را اعلام نماید و یا اگر توافق نداشتند یک سکه را پرتاب و براساس آن نتیجه را پاسخ دهند.

الف- احتمال انتخاب هریک از زن و مرد $\frac{۱}{۲}$ بوده و احتمال اینکه برنده شوند یعنی به سوال پاسخ صحیح بدهند **P** و احتمال پاسخ غیر صحیح دادن **1-P** می باشد لذا احتمال برنده شدن برابر است با:

$$p\ (\text{برنده شدن}) = \frac{۱}{۲}P + \frac{۱}{۲}P = P$$

ب) **A** = پیشامد برنده شدن ، **B** = پیشامد توافق داشتن ، **B′** = پیشامد عدم توافق

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B')P(B')$$

$$= \frac{P(B|A)P(A)P(B)}{P(B)} + \frac{P(B'|A)P(A)P(B')}{P(B')}$$

$$= \left(\frac{۱}{۲}P\right)(P) + \left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}(P^{۲} + \frac{۱}{۲}) = \frac{۲P^{۲}+۱}{۴}$$

۵۵ - در مساله ۵۴ ، اگر $P = ۰/۶$ باشد و آنهاروش (ب) را بکار ببرند ، احتمال شرطی اینکه زوج پاسخ صحیح دهند بشرط اینکه ،

الف) آنها به توافق برسند.

ب) آنها به توافق نرسند.

را بدست آورید.

A = پیشامد پاسخ صحیح ، **A′** = پیشامد پاسخ غلط ، **B** = پیشامد توافق

B' = پیشامد عدم توافق

الف)
$$P(A|B)=\frac{P(A|B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A')P(A')}$$

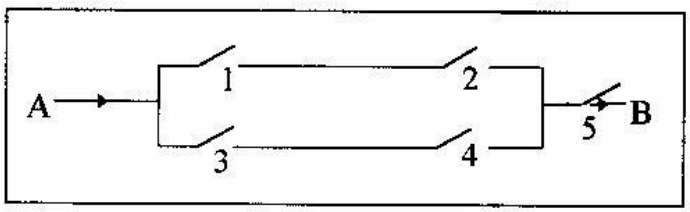
$$=\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)(۰/۶)(۰/۶)}{\left(\frac{۱}{۲}\right)(۰/۶)(۰/۶)+\left(\frac{۱}{۲}\right)(۰/۴)(۰/۴)}=\frac{۳۶}{۵۲}=\frac{۹}{۱۳}$$

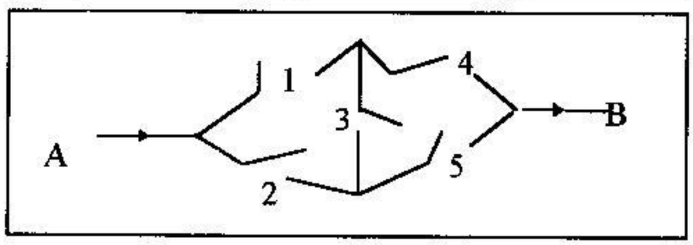
ب)
$$P(A|B')=\frac{P(A|B')}{P(B')}=\frac{P(B'|A)P(A)}{P(B'|A)P(A)+P(B'|A')P(A')}$$

$$=\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)}{\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)}=\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

۵۶- *

۵۷- احتمال بسته شدن رله i ام (۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ = i) در مدارهای زیر برابر با P_i است . اگر همه رله ها بطور مستقل عمل کنند ، احتمال اینکه جریان از نقطه A به نقطه B عبور کند را در هر یک از مدارهای زیر را بدست آورید.





راهنمایی: روی پیشامد اینکه رله ۳ عمل نکند مشروط کنید

الف) شکل اول :　　p (عبور جریان) = $P_1P_2P_5$

ب) شکل دوم : P (عبور جریان | عمل نکردن ۳) = $P_1 P_4 + P_2 P_5$

۵۸- یک سیستم مهندسی که از n جزء تشکیل شده باشد را یک سیستم ((K از n)) می گویند، $(k \le n)$ هر گاه کار کردن سیستم مشروط به کار کردن حداقل k جزء باشد .فرض کنید همه اجزاء بطور مستقل کار کنند.

الف) اگر i امین جزءبا احتمال p_i (۴ و ۳ و ۲ و ۱ = i) کار کند احتمال کار کردن یک سیستم ((۲ از ۴)) را بدست آورید.

ب) قسمت (الف) را برای یک سیستم ((۳ از ۵)) تکرار کنید.

ج)اگر p_i (۴ و ۳ و ۲ و ۱ = i)، احتمال کار کردن یک سیستم ((k از n)) را بدست آورید.

الف) چون احتمال کارکردن یک سیستم ۲ از ۴ را می خواهیم $\binom{4}{2}$ حالت خواهیم داشت:

$$P\,(\text{کارکردن ۲ از ۴}) = P_1P_2(1-P_3)(1-P_4)+P_1P_3(1-P_2)(1-P_4)+P_1P_4(1-P_2)(1-P_3)$$
$$+P_2P_3(1-P_1)(1-P_4)+P_2P_4(1-P_1)(1-P_3)+P_3P_4(1-P_1)(1-P_2)$$

ب)این قسمت ۱۰ جمله خواهد داشت زیرا تعداد ترکیبات ۳ از ۵ مدنظر است $\binom{5}{3}$

$$P\,(\text{کارکردن ۳ از ۵}) = P_1P_2P_3(1-P_4)(1-P_5)+\cdots+P_3P_4P_5(1-P_1)(1-P_2)$$

ج) بدیهی است احتمال کارکردن یک سیستم (K از N) ، $\binom{N}{K}$ جمله خواهد داشت.

۵۹- *

۶۰ - با احتمال $\frac{1}{2}$ ، ملکه دارای ژن هموفیلی است.اگر او دارای ژن باشد آنگاه هر فرزند او با احتمال $\frac{1}{2}$ بیماری هموفیلی را خواهد داشت اگر ملکه سه فرزند سالم داشته باشد احتمال اینکه او دارای ژن هموفیلی باشد چقدر است؟ اگر ملکه فرزند چهارمی بدنیا آورد احتمال اینکه او هموفیلی باشد چقدر است؟

A = پیشامد اینکه ملکه دارای ژن هموفیلی باشد، B_1 , B_2 , B_3 , B_4= پیشامدهای اینکه فرزندان دارای ژن هموفیلی باشند.

قسمت اول)
$$P(A|B_1,B_2,B_3)=\frac{P(A\cap B_1,B_2,B_3)}{P(B_1,B_2,B_3)}$$
$$=\frac{P(A\cap B_1)P(A\cap B_2)P(A\cap B_3)}{P(B_1)P(B_2)P(B_3)}=\frac{P(B_1|A)P(A)P(B_2|A)P(A)P(B_3|A)P(A)}{P(B_1)P(B_2)P(B_3)}=\frac{1}{8}$$

قسمت دوم)
$$p(B_4)=P(B_4|B'_3)P(B'_3)=P(B_4|B'_3)P(B'_3|B'_2)P(B'_2)$$
$$=P(B_4|B'_3)P(B'_3|B'_2)P(B'_2|B'_1)P(B'_1)\approx P(B_4|B'_3)P(B'_3|B'_2)P(B'_2|B'_1)\ p(B_1|A')P(A')$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(1)=\left(\frac{1}{16}\right)$$

۶۱- *

۶۲- *

۶۳ - فرض کنید هر طفلی که به دنیا می آید با شانس برابر ، پسر یا دختر و مستقل از جنس سایر فرزندان باشد. برای زوجی که ۵ فرزند دارند ، احتمال پیشامدهای زیر بدست آورید.

الف) همه فرزندان از یک جنس باشند.

ب) ۳ فرزند بزرگتر پسر و دو فرزند دیگر دختر باشند.

ج) دقیقاً ۳ فرزند پسر باشد.

د) ۲ فرزند بزرگتر دختر باشند.

هـ) حداقل یک فرزند دختر باشد.

الف) فضای نمونه ای این آزمایش مانند فضای نمونه ای آزمایش پرتاب سکه خواهد بود. $2^5 = 32$

که در یکی از این حالات همگی پسر و در یکی همگی دختر خواهند بود پس احتمال مورد نظر عبارت است از :
$$P(A)=\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{16}$$

ب) تنها در یکی از این حالتها سه فرزند اول پسر و دو فرزند دیگر دختر هستند.

$$P(B)=\frac{1}{32}$$

ج) تعداد حالتهای انتخاب سه فرزند از ۵ فرزند عبارتست از : $\binom{5}{3}=10$

پس احتمال مورد نظر برابر است با : $P(C)=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$

د) چون تکلیف دو فرزند اول شخص است لذا سه فرزند دیگر به 2^3 حالت قرار می گیرند: $P(D)=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$

هـ) مشخص است که تنها در یکی از این ۳۲ حالت همگی پسر هستند و در ۳۱ حالت دیگر حداقل یک دختر وجود دارد پس احتمال مورد نظر عبارتست از : $P(H)=\frac{31}{32}$

۶۴ - احتمال بردن در یک مرتبه پرتاب یک تاس برابر با p است . شخص A تاس را پرتاب می کندو اگر موفق نشود آن را به شخص B می دهد که او برای برنده شدن پرتاب کند. AوB بازی را ادامه می دهند، تا یکی از آنها برنده شود. احتمال برنده شدن هر کدام را بدست آورید.مسأله را برای وقتی که K بازیکن هستند تکرار کنید.

با رسم نمودار درختی مشخص می شود که : P (برنده شدن)=$p(1-p)^{n-1}$

۶۵ - مساله ۶۴ را با این فرض که اگر A تاس را پرتاب کند با احتمال P_1برنده شود و اگر B تاس را پرتاب کندبا احتمال P_2 برنده شود. تکرار کنید.

احتمال برنده شدن A برابر است با : $P(A)=(1-P_1)^{\frac{N-1}{2}}\times(1-P_2)^{\frac{N-1}{2}}\times P_1$

احتمال برنده شدن B برابر است با : $P(B)=(1-P_1)^{\frac{N}{2}}\times(1-P_2)^{\frac{N-2}{2}}\times P_2$

۶۶ - سه بازیکن بطور متوالی سکه ای را پرتاب می کنند. سکه پرتاب شده توسط A ، B و C بترتیب با احتمال P_1 ، P_2و P_3 شیر ظاهر می شود. اگر یکی از بازیکن ها نتیجه ای متفاوت از دو بازیکن دیگر بدست آورد. آنگاه او به عنوان فرد تکی از بازی خارج می شود اگر هیچکس تکی نباشد بازی ادامه می یابد تا اینکه فرد تک مشخص شود. احتمال اینکه A فرد تک باشد چقدر است؟

P (فرد A تک باشد $\Rightarrow (1-P_1)P_2P_3 + P_1(1-P_2)(1-P_3)$

۶۷ - فرض کنید E و F دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش باشند. نشان دهید که اگر آزمایشهای ساده مستقل از این نوع را تکرار کنیم آنگاه E قبل از F با احتمال $P(E)/[P(E)+P(F)]$ اتفاق می افتد.

دو پیشامد ناسازگارند وقتی که : $P(E\cap F)=0$ لذا داریم:

فضای نمونه ای $\Rightarrow S = P(E\cup F) = P(E) + P(F)$

پس احتمال اینکه E قبل از F اتفاق افتد برابر است با :

$$P(X)=\frac{P(E)}{P(E)+P(F)}$$

۶۸ - وقتی که A و B سکه هایی را پرتاب می کنند، کسی که سکه اش به خط مشخص شده ای نزدیک تر باشد برنده است و یک ریال از دیگری دریافت می کند. اگر A با ۳ ریال و B با ۷ ریال بازی را شروع کنند، احتمال اینکه A همه پولها را ببرد در صورتیکه آنها مهارت یکسانی داشته باشند را بدست آورید. اگر A بازیکن بهتری باشد بطوریکه ۶۰٪ اوقات برنده شود آنگاه احتمال مربوطه را محاسبه کنید.

الف) در هر مرحله از مسابقه احتمال برد فرد A $\left(\frac{1}{2}\right)$ می باشد چون مهارت هر دو برابر است پس احتمال اینکه A همه پولها را ببرد عبارست است از : $P(A)=\left(\frac{1}{2}\right)^7$

ب) در هر مرحله احتمال برد A ، (۰/۶) است پس: $P(A)=(0/6)^7$

۶۹- *

۷۰- *

۷۱- *

۷۲- *

۷۳ - تاس A دارای ۴ وجه قرمز و ۲ وجه سفید وتاس B دارای ۲ وجه قرمز و ۴وجه سفید است . یک سکه را پرتاب می کنیم، اگر شیر ظاهر شود بازی را با تاس A و اگر خط ظاهر شود با تاس B بازی را انجام می دهیم.

الف) نشان دهید که احتمال قرمز آمدن درهرپرتاب $\frac{1}{2}$ است.

ب) اگر دو پرتاب اولیه قرمز باشد احتمال اینکه نتیجه سومین پرتاب قرمز باشد چقدر است؟

ج) اگر دو پرتاب اولیه قرمز ظاهر سود. احتمال اینکه تاس A پرتاب شده باشد را بدست آورید.

الف) A = پیشامد وجه قرمز تاس B، A = پیشامد وجه قرمز تاس B

H = پیشامد رو شدن شیر، T = پیشامد روشدن خط ، R = پیشامد قرمز بودن

$$P(R)=P(R|A)P(A)+P(R|B)P(B)$$

$$=P(R|A)P(A|H)P(H)+P(R|B)P(B|T)P(T)$$

$$=\left(\frac{4}{6}\right)(1)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{6}\right)(1)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

ب) R_1 , R_2 , R_3 = پیشامدهای اینکه اولین ، دومین و سومین پرتاب قرمز باشند.

$$P(R_3|R_1,R_2)=\frac{P(R_3\cap R_1,R_2)}{P(R_1,R_2)}$$

$$=\frac{P(R_3,R_1,R_2|A)P(A)+P(R_3,R_1,R_2|B)P(B)}{P(R_1,R_2|A)P(A)+P(R_1,R_2|B)P(B)}$$

$$=\frac{\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{5}$$

ج)

$$P(A|R_1,R_2)=\frac{P(A\cap R_1,R_2)}{P(R_1,R_2)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)}{\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{2}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{16}{72}}{\frac{20}{72}}=\frac{4}{5}$$

۷۹- متهمی توسط سه قاضی محاکمه میشود، گناهکار اعلام می شود اگر حداقل ۲ نفر رأی به گناهکاری او بدهند. فرض کنید وقتی که متهم واقعاً گناهکار باشد هر یک از قضات بطرز مستقل با احتمال ۰/۷ رأی به گناهکاری او بدهند و هر گاه متهم واقعاً بیگناه باشد احتمال رأی به گناهکاری توسط هر قاضی به ۰/۲ کاهش یابد اگر ۷۰ درصد از متهمان گناهکار باشند احتمال شرطی اینکه قاضی سوم رأی به گناهکاری بدهد را بشرط هر یک از حالات زیر بدست آورید.

الف) قاضی اول و دوم رأی به گناهکاری داده اند.

ب) یکی از دو قاضی اول و دوم رأی به گناهکاری دیگری رأی به بی گناهی داده اند.

ج) قاضی اول و دوم هر دو رأی به بی گناهی داده اند.

اگر E_i (۳ و ۲ و ۱ = i) نشان دهنده پیشامدی باشد که قاضی i ام رأی به گناهکاری بدهد. آیا این پیشامد ها مستقلند؟ آیا پیشامدها مشروط مستقلند؟ (شرح دهید).

اگر فرض کنیم A_i ها پیشامد های قاضی ها باشند ، B= پیشامد گناهکار ، B′= پیشامد بیگناه

الف)

$$P(A_۳|A_۱,A_۲)=\frac{P(A_۳.A_۲,A_۱)}{P(A_۱,A_۲)}$$

$$=\frac{P\big(A_۳A_۲A_۱|B\big)P(B)+P\big(A_۳A_۲A_۱|B'\big)P(B')}{P\big(A_۱A_۲|B\big)P(B)+P\big(A_۱A_۲|B'\big)P(B')}$$

$$=\frac{(۰/۷)^۳(۰/۷)+(۰/۲)^۳(۰/۳)}{(۰/۷)^۲(۰/۷)+(۰/۲)^۲(۰/۳)}=\frac{۹۷}{۱۴۲}$$

ب)

$$P(A_۳|A_۱A_۲')=\frac{P(A_۳.A_۱,A_۲')}{P(A_۱,A_۲')}$$

$$= \frac{P\left(A_۲ A_۱ A_۲' | B\right) P(B) + P\left(A_۲ A_۱ A_۲' | B'\right) P(B')}{P\left(A_۱ A_۲' | B\right) P(B) + P\left(A_۱ A_۲' | B'\right) P(B')}$$

$$= \frac{(۰/۷)(۰/۷)(۰/۳)(۰/۷) + (۰/۲)(۰/۲)(۰/۸)(۰/۳)}{(۰/۷)(۰/۳)(۰/۷) + (۰/۲)(۰/۸)(۰/۳)}$$

$$= \frac{۱۵}{۲۶}$$

ح)

$$P(A_۲ | A_۱' A_۲') = \frac{P(A_۲ . A_۱' , A_۲')}{P(A_۱', A_۲')}$$

$$= \frac{(۰/۷)(۰/۳)(۰/۳)(۰/۷) + (۰/۲)(۰/۸)(۰/۸)(۰/۳)}{(۰/۳)(۰/۳)(۰/۷) + (۰/۸)(۰/۸)(۰/۳)}$$

$$= \frac{۳۳}{۱۰۲}$$