t Hn# · »k± { # Ï IµTeH#ÂºIL¶#JIT ¨ #ÁIµ¹ÀHn

فصل چهارم : متغییر های تصادفی

فصل چهارم

متغیرهای تصادفی

۱- دو توپ را به تصادف از ظرفی با ۸ توپ سفید، ۴توپ سیاه و ۲ توپ نارنجی انتخاب می کنیم. فرض کنید برای هر توپ سیاه ۲ ریال جایزه و برای هر توپ سفید انتخاب شده ۱ ریال جریمه شویم اگر X نشان دهنده میزان برد باشد مقادیر ممکن X و احتمال مربوط به هر مقدار را بدست آورید.

$$P(X=-۲)=\frac{\binom{۸}{۲}}{\binom{۱۴}{۲}}=\frac{۴}{۱۳},\ P(X=-۱)=\frac{\binom{۸}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۱۴}{۲}}=\frac{۱۶}{۹۱}$$

$$P(X=۰)=\frac{۱}{۹۱},\ P(X=۱)=\frac{۳۲}{۹۱}\text{و}P(X=۲)=\frac{۸}{۹۱}$$

$$P(X=۴)=\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۱۴}{۲}}=\frac{۶}{۹۱}$$

۲- سه تاس را پرتاب می کنیم، فرض کنید تمامی $۲۱۶=۶^۳$ نتایج ممکن هم شانس باشند. اگر X نشان دهنده جمع سه عدد حاصل شده در هر پرتاب باشد، احتمال مقادیری که X انتخاب میکند را بدست آورید.

$$P(X=۳)=\frac{۱}{۲۱۶},\ P(X=۴)=\frac{۳}{۲۱۶}\text{و}\cdots$$

$$\cdots\text{و}P(X=۱۷)=\frac{۳}{۲۱۶},\ P(X=۱۸)=\frac{۱}{۲۱۶}$$

$$P(X=۳)+P(X=۴)+\cdots+P(X=۱۶)+P(X=۱۷)+P(X=۱۸)=۱$$

۳- *

۴- ۵ مرد و ۵ زن را براساس امتیازی که در یک امتحان کسب می کنند، رتبه بندی می کنیم. فرض کنید هیچ دو امتیازی یکسان نباشد و تمامی !۱۰ حالت مختلف رتبه بندی هم شانس باشند. اگر x نشان دهنده بالاترین رتبه کسب شده توسط یک زن باشد(مثلاً $x=۱$ یعنی اینکه رتبه اول زن است) مطلوب است:

$p\{x=i\}\qquad i=$ ۱ و ۲ و ... و ۱۰

$$P(X=۱)=\frac{\binom{۵}{۱}\times ۹!}{۱۰!}=\frac{۱}{۲},P(X=۲)=\frac{۵\times\binom{۵}{۱}\times ۸!}{۱۰!}=\frac{۵}{۱۸}$$

$$P(X=۳)=\frac{۵\times ۴\times\binom{۵}{۱}\times ۷!}{۱۰!}=\frac{۵}{۸۴},P(X=۴)=\frac{۵\times ۴\times ۳\times\binom{۵}{۱}\times ۶!}{۱۰!}=\frac{۵}{۸۴}$$

$$P(X=۵)=\frac{۵\times ۴\times ۳\times ۲\binom{۵}{۱}\times ۵!}{۱۰!}=\frac{۵}{۲۵۲},P(X=۶)=\frac{۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱\binom{۵}{۱}\times ۴!}{۱۰!}=\frac{۱}{۲۵۲}$$

۵- سکه ای را n مرتبه پرتاب می کنیم ، اگر اختلاف بین تعداد شیرها و تعداد خطها ظاهر شده را با X نشان دهیم. مقادیر ممکن X چه هستند؟

$X=n-۲i \quad i=۰,۱,۲,\cdots,n$

۶- در مسأله ۵ اگر سکه سالم باشد ، برای $n=۳$ احتمال مربوط به مقادیر ممکن $\mathbf{X}$ را بدست آورید.

$$P(X=۰)=۰,P(X=۱)=\binom{۳}{۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)+\binom{۳}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱}=\frac{۶}{۸}$$

$$P(X=۲)=۰(X=۳)=\binom{۳}{۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}+\binom{۳}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۰}=\frac{۲}{۸}$$

۷- فرض کنید تاسی را دو مرتبه پرتاب می کنیم . متغیر های تصادفی زیر چه مقادیری را میتوانند اختیار کنند.

الف) بیشترین عددی که در دو پرتاب حاصل می شود.

ب) کمترین عددی که در دو پرتاب حاصل می شود.

ج) مجموع دو عدد حاصل شده.

د) عدد ظاهر شده اولین پرتاب منهای عدد ظاهر شده دومین پرتاب.

الف) ۶ و ۰۰۰ و ۲ و ۱ ب) ۶ و ۰۰۰ و ۲ و ۱

ج) ۱۲ و ۰۰۰ و ۳ و ۲ د) ۵ و ۴ و ۰۰۰ و ۴- و ۵-

۸- اگر تاس مسأله ۷ سالم باشد، احتمال های مربوطه به متغیر های تصادفی قسمت های (الف) تا(د) را بدست آورید.

الف) $P(X=3)=\frac{5}{36}$ و $P(X=2)=\frac{3}{36}$ و $P(X=1)=\frac{1}{36}$

$P(X=6)=\frac{11}{36}$ و $P(X=5)=\frac{9}{36}$ و $P(X=4)=\frac{7}{36}$

ب) مانند حالت قبل می باشد.

ج) $P(X=4)=\frac{3}{36}$ و $P(X=3)=\frac{2}{36}$ و $P(X=2)=\frac{1}{36}$

$P(X=12)=\frac{1}{36}$ و $\cdots$ و $P(X=9)=\frac{4}{36}$ و $\cdots$ و $P(X=5)=\frac{4}{36}$

د) $P(X=-5)=\frac{1}{36}$ و $P(X=-4)=\frac{2}{36}$ و $\cdots$

$P(X=5)=\frac{1}{36}$ و $P(X=4)=\frac{2}{36}$ و $\cdots$ و $P(X=0)=\frac{6}{36}$ و $\cdots$

۹- *

۱۰- *

۱۱- *

۱۲- *

۱۳- یک بازاریاب برای فروش کتاب با دونفر وعده ملاقات دارد در ملاقات اول او با احتمال ۰/۳ میتواند کتاب را بفروشد و در ملاقات دوم مستقل از نتیجه ملاقات اول با احتمال ۰/۶ قادر خواهد بود که کتاب را بفروش برساند . هر فروش با شانس برابر می تواند نوع با جلد شومیز و با قیمت ۱۰۰۰ ریال و یا نوع معمولی با قیمت ۵۰۰ ریالی باشد. تابع احتمال میزان کل فروش (X) برحسب ریال را بدست آورید.

$$P(X=0)=(0/7)(0/4)=0/28$$

$$P(X=500)=(0/3)\left(\frac{1}{2}\right)(0/4)+(0/6)\left(\frac{1}{2}\right)(0/7)=0/27$$

$$P(X=1000)=(0/3)\left(\frac{1}{2}\right)(0/6)\left(\frac{1}{2}\right)+(0/3)\left(\frac{1}{2}\right)(0/4)+(0/6)\left(\frac{1}{2}\right)(0/7)=0/315$$

$P(X=2000)=(0/3)\left(\frac{1}{2}\right)(0/6)\left(\frac{1}{2}\right)=0/045$ و

$P(X=1500)=0/09$

۱۴ - ۵ عدد متفاوت را به تصادف بین بازیکن های ۱ تا ۵ تقسیم می کنیم. وقتی که دو بازیکن اعداد خود را مقایسه می کنندکسی که عدد بزرگتری دارد برنده محسوب میشود ابتدا بازیکن ۱ و ۲، اعداد خود را مقایسه میکنند، سپس برنده آنها با بازیکن شماره ۳ و به همین ترتیب بازی ادامه می یابد. اگر X نشان دهنده تعداد دفعاتی باشد که بازیکن ۱ برنده است مطلوب است محاسبه:

$p\{x=i\}$ $\quad i=0$ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴

$P(X=0)=\frac{1}{2}$ و $P(X=1)=\frac{1}{4}$ و $P(X=2)=\frac{1}{8}$

$P(X=3)=\frac{1}{8}$ و $P(X=4)=\frac{1}{32}$

۱۵- *

۱۶- *

۱۷- فرض کنید که تابع توزیع تجمعی X بصورت زیر باشد.

$$F(b)=\begin{cases}0 & b<0\\ \frac{b}{4} & 0\leq b\leq 1\\ \frac{1}{2}+\frac{b-1}{4} & 1\leq b\leq 2\\ \frac{11}{12} & 2\leq b<3\\ 1 & b\geq 3\end{cases}$$

الف) $P\{x=i\}$ ($i=1$ و ۲ و ۳)، را بدست آورید

ب) $p\left\{\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}\right\}$ را محاسبه کنید.

الف) $P(X=1)=P(X\leq 1)-P(X<1)$

$$= F(۱) - \lim_{n\to\infty}{}^{*} F(۱ - \frac{۱}{n}) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

$$P(X = ۲) = P(X \leq ۲) - P(X < ۲) = F(۲) - \lim_{n \to \infty} F(۱ - \frac{۱}{n}) = \frac{۱۱}{۱۲} - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۶}$$

$$P(X = ۳) = P(X \leq ۳) - P(X < ۳) = ۱ - \frac{۱۱}{۱۲} = \frac{۱}{۱۲}$$

ب)

$$P\left(\frac{۱}{۲} < X < \frac{۳}{۲}\right) = F\left(\frac{۳}{۲}\right) - F\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

$$= \frac{۵}{۸} - \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

✓ ۱۸ - سکه ای منظم را ۴ مرتبه بطور مستقل پرتاب می کنیم. اگر x نشان دهنده تعداد شیرهای ظاهر شده باشد. تابع احتمال متغیر تصادفی x-۲ را رسم کنید

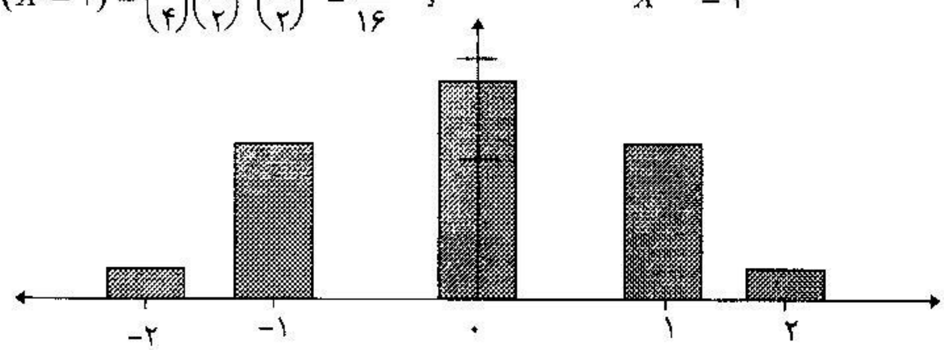
$$P(X = ۰) = \binom{۴}{۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴} = \frac{۱}{۱۶} \quad , \quad X = -۲$$

$$P(X = ۱) = \binom{۴}{۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} = \frac{۴}{۱۶} \quad , \quad X = -۱$$

$$P(X = ۲) = \binom{۴}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲} = \frac{۶}{۱۶} \quad , \quad X = ۰$$

$$P(X = ۳) = \binom{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱} = \frac{۴}{۱۶} \quad , \quad X = ۱$$

$$P(X = ۴) = \binom{۴}{۴}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۰} = \frac{۱}{۱۶} \quad , \quad X = ۲$$



۱۹- اگر تابع توان توزیع تجمعی X بصورت زیر داده شود.

$$F(B)=\begin{cases} ۰ & b<۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۰\le b<۱ \\ \frac{۳}{۵} & ۱\le b<۲ \\ \frac{۴}{۵} & ۲\le b<۳ \\ \frac{۹}{۱۰} & ۳\le b<۳/۵ \\ ۱ & b\ge ۳/۵ \end{cases}$$

تابع احتمال **X** را بدست آورید.

$$P(X=۰)=P(X\le ۰)-P(X<۰)=\frac{۱}{۲},P(X=۱)=\frac{۳}{۵}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۰}$$

$$P(X=۲)=*\frac{۴}{۵}-\frac{۳}{۵}=\frac{۱}{۵},P(X=۳)=\frac{۹}{۱۰}-\frac{۴}{۵}=\frac{۱}{۱۰}$$

$$P(X=۳/۵)=۱-\frac{۹}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰}$$

۲۰- *

۲۱- چهار اتوبوس که حامل ۱۴۸ دانش آموز از یک مدرسه هستند به یک استادیوم فوتبال وارد می شوند اتوبوسها بترتیب حامل ۴۰ و ۳۳و ۲۵ و ۵۰ دانش آموز هستند یک دانش آموز را به تصادف انتخاب نموده ، فرض کنید. x نشان دهنده تعداد دانش آموزانی باشد که در اتوبوسی بوده اند که این دانش آموز انتخاب شده است . یکی از چهار راننده را نیز به تصادف انتخاب می کنیم، فرض کنید Y نشان دهنده تعداد دانش آموزان اتوبوس آن راننده باشد.

الف) کدامیک از مقادیر $E(X)$ و $E(Y)$ فکر می کنید بزرگتر هستند ؟ چرا؟

ب) مقادیر $E(X)$ و $E(Y)$ را محاسبه کنید.

$$P(X=40)=\frac{\binom{40}{1}}{\binom{148}{1}}=\frac{40}{148} \qquad P(X=33)=\frac{33}{148}$$

$$P(X=25)=\frac{25}{148}, \qquad P(X=50)=\frac{\binom{50}{1}}{\binom{148}{1}}=\frac{50}{148}$$

$$E(X)=(40)\left(\frac{40}{148}\right)+(33)\left(\frac{33}{148}\right)+(25)\left(\frac{25}{148}\right)+(50)\left(\frac{50}{148}\right)$$

$$=39/2837$$

$$P(Y=40)=\frac{1}{4}, \quad P(Y=33)=\frac{1}{4}, \quad p(Y=25)=\frac{1}{4}$$

$$P(Y=50)=\frac{1}{4}$$

$$E(Y)=(40)\left(\frac{1}{4}\right)+(33)\left(\frac{1}{4}\right)+(25)\left(\frac{1}{4}\right)+(50)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=37$$

۲۲- فرض کنید، ۲ تیم یک سری مسابقه با یکدیگر بدهند و وقتی که یکی از تیم ها i مرتبه برنده شد بازی متوقف گردد. اگر در هر بازی، تیم A با احتمال P برنده شود، امید ریاضی تعداد بازیها را در حالات الف) $i=2$ و ب) $i=3$ بدست آورید. همچنین در هر دو حالت نشان دهید که مقادیر امید ریاضی وقتی حداکثر می شوند که $P=\frac{1}{2}$ باشد.

الف)
$$P(X=2)=\binom{2}{2}P^{2}+\binom{2}{2}(1-P)^{2}$$

$$P(X=3)=\binom{3}{2}P^{2}(1-P)+\binom{3}{2}P(1-P)^{2}$$

$$E(X)=-2P^{2}+2P+2 \Rightarrow \frac{dE}{dP}=-4P+2=0 \Rightarrow \boxed{P=\frac{1}{2}}$$

ب)

$$P(X=۳)=\binom{۳}{۳}P^{۳}+\binom{۳}{۳}(۱-P)^{۳}$$

$$P(X=۴)=\binom{۴}{۳}P^{۳}(۱-P)+\binom{۴}{۳}P\ (۱-P)^{۳}$$

$$P(X=۵)=\binom{۵}{۳}P^{۳}(۱-P)^{۲}+\binom{۵}{۳}P^{۲}(۱-P)^{۳}$$

$$E(X)=۱۸P^{۴}-۳۶P^{۳}+۱۱P^{۲}+۷P+۳$$

$$\frac{dE}{dP}=۷۲P^{۳}-۱۰۸P^{۲}+۲۲P+۷=(P-\frac{۱}{۲})(۷۲P^{۲}-۷۲P-۱۴)=۰\Rightarrow \boxed{P=\frac{۱}{۲}}$$

۲۳- در یک جعبه شامل ۵ قطعه الکتریکی میدانیم که دو قطعه معیوب وجود دارد اگر برای کشف قطعات معیوب ، آنها را یک به یک و به تصادف آزمایش کنیم. امید ریاضی تعداد آزمایش های لازم را بدست آورید.

احتمال اینکه هر دو معیوب در دو انتخاب اول باشند:

$$P(X=۲)=\left(\frac{۲}{۵}\right)\left(\frac{۱}{۴}\right)=\frac{۱}{۱۰}$$

$$P(X=۳)=\left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۳}\right)+\left(\frac{۲}{۵}\right)\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۳}\right)=\frac{۲}{۱۰}$$

$$P(X=۴)=\left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۴}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۴}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۲}{۵}\right)\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۳}{۱۰}$$

$$P(X=۵)=\left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۲}{۲}\right)+\left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۴}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۴}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)$$
$$+\left(\frac{۲}{۵}\right)\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۲}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۴}{۱۰}$$

$$E(X)=۲\left(\frac{۱}{۱۰}\right)+۳\left(\frac{۲}{۱۰}\right)+۴\left(\frac{۳}{۱۰}\right)+۵\left(\frac{۴}{۱۰}\right)=۴$$

۲۴- *

۲۵- *

۲۶- *

۲۷- یک موسسه بیمه ، بیمه نامه ای می نویسد که اگر در طول یکسال حادثه E اتفاق افتد بایستی مبلغ A پرداخت نماید اگر شرکت بیمه برآوردکند که پیشامد E بااحتمال p در طول یکسال اتفاق میافتد چه مقدار بایستی حق بیمه را تنظیم نماید تا متوسط سود شرکت ۱۰ درصد مبلغ A باشد؟

x = پیشامد مقدار پولی که پرداخت می شود. $P(X = A) = P$

متوسط پولی که در سال ممکن است پرداخت شود $E(X) = XP(X) = AP \Rightarrow$

این مبلغ در صورتی تحقق می یابد که هیچ سودی عاید مؤسسه نشود اما اگر بخواهیم متوسط سود شرکت $\frac{1}{10}A$ باشد حق بیمه عبارت است از :

$$\text{حق بیمه} = AP + \frac{1}{10}A = A\left(P + \frac{1}{10}\right)$$

۲۸ - یک نمونه ۳ تایی از قطعات داخل جعبه که شامل ۲۰ قطعه است و ۴ تای آنها معیوب هستند انتخاب می کنیم. امید ریاضی تعداد قطعات معیوب داخل نمونه را بدست آورید.

$$P(X=0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{16}{3}}{\binom{20}{3}} = \left(\frac{28}{57}\right), P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{16}{2}}{\binom{20}{3}} = \left(\frac{8}{19}\right)$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{16}{1}}{\binom{20}{3}} = \left(\frac{8}{95}\right), (X=3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{16}{0}}{\binom{20}{3}} = \left(\frac{1}{1710}\right)$$

$$E(X) = (0)\left(\frac{28}{57}\right) + (1)\left(\frac{8}{19}\right) + (2)\left(\frac{8}{95}\right) + (3)\left(\frac{1}{1710}\right) \approx \frac{3}{5}$$

۳۰ - شخصی یک سکه سالم را آنقدر پرتاب می کند تا برای اولین مرتبه خط ظاهر شود . اگر در n امین پرتاب خط ظاهر شود وی 2^n ریال جایزه می برد فرض کنید x نشان دهنده میزان جایزه شخص باشد نشان دهید که $E[X] = \infty$ است . این مساله به (پارادوکس سنت پترزبورگ) مشهور است.

الف) آیا مایل هستید که مبلغ یک میلیون ریال برای یک مرتبه انجام این بازی بپردازید؟
ب) آیا مایل هستید که مبلغ یک میلیون ریال را برای هر مرتبه بازی بپردازید در صورتیکه تا زمانی که مایل باشید بتوانید بازی را ادامه دهید و فقط زمان توقف را تعیین نمایید.

$$P(X=۲^۲)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad P(X=۲)=\frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad P(X=۰)=\frac{۱}{۲}$$

$$P(X=۲^{N})=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{N-۱} \quad \text{و} \quad P(X=۲^{N-۱})=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{N-۲} \quad \text{و} \quad \cdots$$

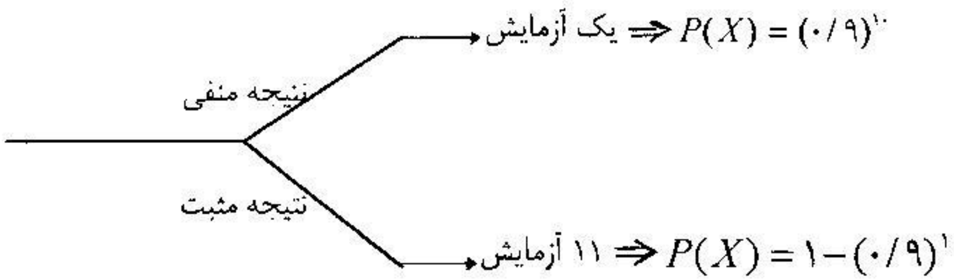
$$E(X)=۰\left(\frac{۱}{۲}\right)+(۲)\left(\frac{۱}{۲}\right)+(۴)\left(\frac{۱}{۴}\right)+\cdots+۲^{N}\left(\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{N-۱}\right)$$

$$=۰+۱+۱+\ldots+۱=\infty$$

۳۱- *

۳۲ - برای بررسی اینکه یک گروه ۱۰۰ نفری دارای بیماری معینی هستند یا خیر آنها را مورد آزمایش خون قرار می دهیم بدین ترتیب که آنها را در گروه های ۱۰ نفری تقسیم نموده و نمونه خون هر ۱۰ نفر را با یکدیگر آزمایش می کنیم. اگر نتیجه آزمایش منفی باشد یک آزمایش برای این ۱۰ نفر کافی بوده است در حالیکه اگر نتیجه مثبت باشد هر کدام از افراد بطور جداگانه نیز آزمایش می شوند و جمعاً ۱۱ آزمایش انجام می گیرد.
فرض کنید احتمال اینکه فردی این بیماری را داشته باشد برای همه افراد بطور مستقل برابر با ۰/۱ باشد. امید ریاضی تعداد آزمایش های لازم برای هر گروه را بدست آورید. (توجه کنید که فرض بر این است که وقتی نتیجه آزمایش مثبت است، حداقل یک نفر دارای بیماری است.)

گروه اول را درنظر می گیریم و نتایج بدست آمده را در ۱۰ ضرب می کنیم.



$$E(X_i)=(1)(0/9)^{10}+11\left[1-(0/9)^{10}\right]=11-10(0/9)^{10}$$

$$E(X)=10E(X_i)=110-100(0/9)^{10}$$ کل

۳۳- *

۳۴- *

۳۵- جعبه ای شامل ۵ مهره قرمز و ۵ مهره آبی است ، دو مهره را به تصادف خارج می کنیم . اگر مهره ها از یک رنگ باشند آنگاه ۱/۱ ریال جایزه می گیریم و اگر از رنگهای متفاوت باشند ۱ ریال جریمه می شویم مطلوب است

الف) امید ریاضی مبلغی که برنده می شویم.

ب) واریانس مبلغی که برنده می شویم.

الف)

$$p(x=1/1)=\frac{\binom{5}{2}+\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{4}{9}$$

$$p(x=-1)=\frac{\binom{5}{1}\times\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{5}{9}$$

$$E(X)=(1/1)\left(\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{5}{9}\right)(-1)=-\frac{1}{15}$$

ب)

$$\operatorname{var}(x)=E(x^2)-\left[E(x)\right]^2=1/088$$

۳۶- مساله ۲۲ را با $i=2$ در نظر بگیرید . واریانس تعداد بازیهایی که باید انجام شود را بدست آورده و نشان دهید که این عدد وقتی که $p=\frac{1}{2}$ باشد حداکثر می شود.

(x = تعداد بازی می باشد)

$$p(x=2)=\binom{2}{2}P^2+\binom{2}{2}(1-P)^2$$

$$p(x=3)=\binom{3}{2}P^2(1-P)+\binom{3}{2}P(1-P)^2$$

بر اساس مسأله ۲۲ داریم :

$$E(X) = -۵P^۲ + ۵P + ۲$$

$$E(X^۲) = ۴\left[\binom{۲}{۲}P^۲ + \binom{۲}{۲}(۱-P)^۲\right] + ۹\left[\binom{۳}{۲}P^۲(۱-P) + \binom{۳}{۲}P(۱-P)^۲\right]$$

$$= -۱۹P^۲ + ۱۹P + ۴$$

$$\mathrm{var}(x) = E(x^۲) - [E(x)]^۲ = ۲۵P^۴ - ۵۰P^۳ - ۱۴P^۲ + ۳۹P + ۸$$

$$\frac{dv}{dp} = ۱۰۰p^۳ - ۱۵۰p^۲ - ۲۸p + ۳۹ = ۰ \Rightarrow (p - \frac{۱}{۲})(۱۰۰p^۲ - ۱۰۰p - ۷۸) = ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{p = \frac{۱}{۲}}$$

۳۷- مقدار $Var(x)$ و $Var(Y)$ را برای متغیرهای X و Y داده شده در مساله ۲۱ بدست آورید.

بر اساس مسأله ۲۱ داریم:

$$\mathrm{var}(x) = E(x^۲) - [E(x)]^۲$$

$$E(X^۲) = (۴۰)^۲\left(\frac{۴۰}{۱۴۸}\right) + \cdots + (۵۰)^۲\left(\frac{۵۰}{۱۴۸}\right) = ۱۶۲۵/۴۱۹$$

$$[E(x)]^۲ = ۱۵۴۳/۲$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{var}(x) = ۸۲/۲}$$

$$\mathrm{var}(y) = E(y^۲) - [E(y)]^۲$$

$$E(y^۲) = (۴۰)^۲\left(\frac{۱}{۴}\right) + \cdots + (۵۰)^۲\left(\frac{۱}{۴}\right) = ۱۴۵۳/۵$$

$$[E(y)]^۲ = ۱۳۶۹$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{var}(y) = ۸۴/۵}$$

۳۸ - اگر $E(X) = ۱$ و $Var(x) = ۵$ باشد مطلوب است:

الف) $E\left[(۲+X)^۲\right]$

ب) $Var(۴+۳X)$

الف)

$$var(x) = E(x^۲) - [E(x)]^۲ \Rightarrow E(x^۲) = ۶$$
$$E[(۲ + X)^۲] = E[۴ + ۴X + X^۲] = ۴ + ۴(E(x)) + E(x^۲)$$
$$= ۱۴$$

ب)

$$var(۴ + ۳X) = var(۴) + ۹var(x) = ۰ + ۴۵ = ۴۵$$

۳۹ - توپی را به تصادف از ظرفی که شامل ۳ توپ سفید و ۳ توپ سیاه است انتخاب می کنیم. بعد از انتخاب توپ آن را به ظرف برگردانده و توپ دیگری را انتخاب می کنیم. این کار را بطور نامحدود تکرار می کنیم. احتمال اینکه از ۴ توپ انتخاب شده اول ۲ توپ سفید باشد را بدست آورید.

$X \sim$

$$P(X = ۲) = \binom{۴}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۴ \times ۳}{۲} \times \frac{۱}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

۴۰- در امتحان تستی ۳جوابی با ۵ سوال، احتمال اینکه دانشجویی با حدس زدن تصادفی پاسخ ها حداقل ۴ سوال را درست پاسخ دهد چقدر است؟

$$P(X \geq ۴) = p(x = ۴) + p(x = ۵)$$
$$= \binom{۵}{۴}\left(\frac{۱}{۳}\right)^۴\left(\frac{۲}{۳}\right)^۱ + \binom{۵}{۵}\left(\frac{۱}{۳}\right)^۵\left(\frac{۲}{۳}\right)^۰ = \frac{۱۱}{۲۴۳}$$

۴۱- مردی مدعی است که تیز هوشی خارق العاده ای دارد. برای آزمایش کردن او یک سکه منظم را ۱۰ مرتبه پرتاب می کنیم و از او می خواهیم نتایج را قبل از آزمایش پیش بینی کند. او ۷ نتیجه از ۱۰ نتیجه را درست حدس می زند. احتمال اینکه وی بدون داشتن خصوصیت تیز هوشی بتواند چنین پیش بینی را انجام دهد، چقدر است؟

$$f(x) = \binom{۱۰}{۷}\left(\frac{۱}{۲}\right)^۷\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳ = ۱۲۰\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}$$

۴۲ - فرض کنید موتورهای هواپیما در حال پرواز با احتمال $(1-P)$ مستقل از یکدیگر خراب می شوند. اگر در یک پرواز موفقیت آمیز لازم باشد اکثریت موتورهای هواپیما

سالم باشند برای چه مقداری از p، یک هواپیمای ۵ موتوره، مطمئن تر از یک هواپیمای سه موتوره است؟

$$[p(x \geq ۳)] \geq [p(x \geq ۲)]$$

$$\binom{۵}{۳}p^{۳}(۱-p)^{۲} + \binom{۵}{۴}p^{۴}(۱-p) + \binom{۵}{۵}p^{۵} \geq \binom{۳}{۲}p^{۲}(۱-p) + \binom{۳}{۳}p^{۳}$$

$$۱۰p^{۳} - ۲۰p^{۴} + ۱۰p^{۵} + ۵p^{۴} - ۵p^{۵} + p^{۵} \geq ۳p^{۲} - ۳p^{۳} + p^{۳}$$

$$۳p^{۲}(p-۱)^{۲}(۲p-۱) \geq ۰ \Rightarrow ۲p-۱ \geq ۰ \Rightarrow \boxed{p \geq \frac{۱}{۲}}$$

X ۴۴ - یک کانال ارتباطی که اعداد ۰ و ۱ را انتقال می دهد، به دلیل اشکلات با احتمال ۰/۲ عدد انتقال داده شده اشتباه دریافت میشود. فرض کنید می خواهیم یک پیام که شامل یک عدد دو دویی است را ارسال داریم و برای کاهش شانس اشتباه بجای ۰ عدد ۰۰۰۰۰ و به جای ۱ عدد ۱۱۱۱۱ ارسال گردد. اگردریافت کننده پیام با استفاده از اکثریت اعداد رسیده آن را بخواند احتمال اینکه پیام اشتباه خوانده شود چقدر است؟ چه فرض استقلالی را در نظر می گیرید؟

چون پیام، دو دویی می باشد پس اگر عدد اول یا عدد دوم و یا هر دو اشتباه دریافت شوند پیام غلط دریافت شده است لذا:

X_1 = پیشامد اینکه صفر اشتباه دریافت شود، X_2 = پیشامد اینکه یک اشتباه دریافت شود.

$$P(X_۱ \geq ۳) = ۱ - P(X < ۳) = ۱ - [P(X = ۰) + P(X = ۱) + P(X = ۲)]$$

$$= ۱ - \left[\binom{۵}{۰}(۰/۲)^{۰}(۰/۸)^{۵} + \binom{۵}{۱}(۰/۲)^{۱}(۰/۸)^{۴} + \binom{۵}{۲}(۰/۲)^{۲}(۰/۸)^{۳}\right]$$

$$= ۰/۰۵۸$$

$$P(X_۲ \geq ۳) = ۱ - P(X < ۳) = ۰/۰۵۸$$

احتمال اینکه پیام اشتباه دریافت شود عبارت است از :

$$P(X_۱ \cup X_۲) = P(X_۱) + P(X_۲) - P(X_۱ \cap X_۲)$$

و چون X_1 و X_2 مستقل از یکدیگر هستند داریم:

$$P(X_۱ \cup X_۲) = P(X_۱) + P(X_۲) - P(X_۱)P(X_۲) = ۰/۱۱۲۶$$

۴۴ - یک سیستم ماهواره ای از n جزء ساخته شده است که اگر حداقل k جزء از آنها کار کند، آنگاه سیستم فعال خواهد بود . در یک روز بارانی هر یک از اجزاء مستقل ازیکدیگر با احتمال p_1 کار می کنند در حالیکه در یک روز غیر بارانی هر کدام مستقل از یکدیگر با احتمال p_2 کار خواهند کرد. اگر احتمال باران آمدن فردا برابر با α باشد احتمال اینکه ماهواره کار کند چقدر است؟

$$p(\text{ماهواره کار کند}) = \alpha\left[\binom{n}{k}p_1^k(1-p_1)^{n-k}\right]+(1-\alpha)\left[\binom{n}{k}p_2^k(1-p_2)^{n-k}\right]$$

۴۵ - دانشجویی در حال آماده شده برای شرکت در یک امتحان شفاهی است و از اینکه روز امتحان ((خوش شانس)) یا ((بد شانس)) باشد برایش اهمیت دارد او محاسبه کرده است که در روز خوش شانسی هر یک از امتحان کنندگان بطور مستقل با احتمال ۰/۸ او را قبول می کنند و در روز بد شانسی این احتمال به ۰/۴ کاهش می یابد فرض کنید که برای قبول شدن بایستی اکثریت ممتحنین او را قبول کنند. اگر دانشجو احساس کند که روز امتحان ، امکان بدشانس بودن او در برابر خوش شانس بودنش ۲ است ، آیا بایستی تقاضای امتحانی با ۳ ممتحن و یا تقاضای با ۵ ممتحن را داشته باشد؟

احتمال پذیرفته شدن با سه ممتحن :

$$P(X_1) = (\frac{1}{3})\left[\binom{3}{2}(0/8)^2(0/2)\right]+\left(\frac{2}{3}\right)\left[\binom{3}{2}(0/4)^2(0/6)\right] = 0/32$$

احتمال پذیرفته شدن با پنج ممتحن :

$$P(X_2) = (\frac{1}{3})\left[\binom{5}{3}(0/8)^3(0/2)^2\right]+\left(\frac{2}{3}\right)\left[\binom{5}{3}(0/4)^3(0/6)^2\right] = 0/2218$$

چون $p(x_1) > p(x_2)$ بدیهی است که باید تقاضای امتحانی با ۳ ممتحن را داشته باشد.

۴۶ - فرض کنید برای محکوم کردن یک متهم لازم است که حداقل ۹ نفر از ۱۲ نفر اعضاء هیئت منصفه رأی به مجرم بودن او بدهند همچنین فرض کنید احتمال اینکه یک عضو هیئت منصفه متهم گناهکاری را بی گناه تشخص دهد برابر با ۰/۲ و احتمال اینکه متهم بی گناهی را گناهکار تشخیص دهد برابر با ۰/۱ باشد اگر هر عضو به طور مستقل رأی بدهند

و ۶۵ درصد از متهمین گناهکار باشند ، احتمال اینکه هیئت منصفه رأی صحیح بدهد را بدست آورید . چه در صدی از متهمین مجرم شناخته می شوند؟

احتمال اینکه هیأت منصفه رأی صحیح بدهد برابر است با :

$$P(X)=\left[\binom{۱۲}{۹}(۰/۸)^{۹}(۰/۲)^{۳}+\cdots+\binom{۱۲}{۱۲}(۰/۸)^{۱۲}\right](۰/۶۵)+$$
$$\left[\binom{۱۲}{۹}(۰/۹)^{۹}(۰/۱)^{۳}+\cdots+\binom{۱۲}{۱۲}(۰/۹)^{۱۲}\right](۰/۳۵)=۰/۹۵۴۹$$

احتمال مجرم بودن متهمین برابر است با :

$$P(X)=\left[\binom{۱۲}{۹}(۰/۸)^{۹}(۰/۲)^{۳}+\cdots+\binom{۱۲}{۱۲}(۰/۸)^{۱۲}\right](۰/۶۵)+\left[\binom{۱۲}{۹}(۰/۹)^{۹}(۰/۹)^{۳}+\cdots+\binom{۱۲}{۱۲}(۰/۹)^{۱۲}\right](۰/۳۵)$$
$$=۰/۷۹۴۵$$

✓۴۷ - در بعضی از محاکم نظامی ۹ قاضی را دعوت می کنند و و کلای مدافع متهم و شاکی می توانند با هر قاضی مبارزه نموده و در صورتیکه با هر قاضی مبارزه نموده و در صورتیکه موفق شوند او از جمع قضات کم شده و کسی جایگزین وی نمی شود. درپایان متهمی را مجرم می شناسند که اکثریت قضات رأی به مجرم بودن او بدهند و در غیر این صورت متهم بی گناه شناخته می شود. فرض کنید وقتی که متهم واقعاً مجرم است هر قاضی بطور مستقل با احتمال ۰/۷ رأی به گناهکاری او بدهد و این احتمال برای متهمی که بی گناه است به ۰/۳ کاهش یابد.

الف) احتمال اینکه یک متهم مجرم ، گناهکار تشخیص داده شود را در حالات ۹ قاضی، ۸ قاضی و ۷ قاضی بدست آورید.

ب) قسمت (الف) را برای یک متهم بی گناه محاسبه کنید.

ج) اگر وکیل مدافع شاکی مجاز به مبارزه با قضات نباشد و وکیل مدافع متهم حداکثر بتواند با ۲ قاضی مبارزه کند ، چه تعداد مبارزه بایستی بین وکیل مدافع متهم و قضات صورت پذیرد در صورتیکه او ۶۰ درصد اطمینان داشته باشد که متهم گناهکار است؟

A = پیشامد اینکه متهم مجرم ، گنهکار باشد.

$$\text{(۹ قاضی)} \Rightarrow P(A)=\left[\binom{9}{5}(0/7)^5(0/3)^4+\binom{9}{6}(0/7)^6(0/3)^3+\cdots+\binom{9}{9}(0/7)^9\right]+$$

$$\left[\binom{9}{5}(0/3)^5(0/7)^4+\cdots+\binom{9}{9}(0/3)^9\right]=0/8616$$

$$\text{(۸ قاضی)} \Rightarrow P(A)=\left[\binom{8}{5}(0/7)^5(0/3)^3+\cdots+\binom{8}{8}(0/7)^8\right]+\left[\binom{8}{5}(0/3)^5(0/7)^3+\cdots+\binom{8}{8}(0/3)^8\right]$$

$$=0/8638$$

$$\text{(۷قاضی)} \Rightarrow P(A)=\left[\binom{7}{4}(0/7)^4(0/3)^3+\cdots+\binom{7}{7}(0/7)^7\right]+\left[\binom{7}{4}(0/3)^4(0/7)^3+\cdots+\binom{7}{7}(0/3)^7\right]$$

$$=0/9174$$

۴۸ - تجربه نشان داده است که دیسکت های کامپیوتری تولید شده توسط یک شرکت با احتمال ۰/۰۱ مستقل از یکدیگر معیوب هستند . شرکت دیسکت ها را در بسته های ۱۰ تایی بفروش می رساند و پیشنهاد باز پرداخت پول را با شرط مشاهده حداکثر یک معیوب در هر بسته ارائه می دهد اگر فردی سه بسته از این دیسکت ها را خریداری کند احتمال اینکه او یک بسته را برگرداند چقدر است؟

ابتدا احتمال اینکه یک بسته برگردانده شود را محاسبه می کنیم :

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)\right]$$

$$=1-\left[\binom{10}{0}(0/99)^{10}+\binom{10}{1}(0/01)(0/99)^9\right]=1-0/9958=0/0042$$

احتمال برگشت یک بسته از سه بسته برابر است با :

$$P(X=1)=\binom{3}{1}(0/0042)(0/9958)^2=0/0125$$

۴۹ - فرض کنید که ۱۰ درصد از تراشه های کامپیوتری تولید شده ، توسط یک شرکت تولید کننده سخت افزار معیوب باشند . اگر ۱۰۰ تراشه سفارش بدهیم ، آیا تعداد تراشه های معیوبی را که دریافت میداریم یک متغیر تصادفی دو جمله ای است؟

بله - فرض می کنیم X تعداد تراشه های معیوب باشد:

$$P(X)=\binom{100}{X}(0/1)^X(0/9)^{100-X}$$

۵۰ - فرض کنید یک سکه اریب با احتمال p شیر ظاهر شود این سکه را ۱۰ مرتبه پرتاب می کنیم اگر بدانیم که ۶ شیر ظاهر شده است . احتمال شرطی اینکه نتیجه سه پرتاب اول بصورتهای زیر باشد را بدست آورید .

الف) H، TوT باشد (یعنی اولین پرتاب شیر ، و دو پرتاب بعدی خط باشند.)

ب) T ، H و T باشد.

الف) اگر $\mathbf{H}$ = پیشامد شیر آمدن و $\mathbf{T}$ = پیشامدن خط آمدن فرض شود داریم:

$\mathbf{A}$ = پیشامد اینکه ۶ تا از ۱۰ تا شیر باشد.

$$P(T,T,H|A)=\frac{\binom{7}{5}P^5(1-P)^2}{\binom{10}{6}P^6(1-P)^4}=\frac{1}{10P(1-P)^2}$$

ب)

$$P(T,H,T|A)=\frac{\binom{7}{5}P^5(1-P)^2}{\binom{10}{6}P^6(1-P)^4}=\frac{1}{10P(1-P)^2}$$

۵۱ - متوسط تعداد اشتباهات تایپی در یک صفحه از یک مجله برابر با ۲ است . احتمال اینکه صفحه بعدی این مجله را که مطالعه می کنید شامل :

الف) صفر اشتباه تایپی باشد،

ب) ۲ یا بیش از ۲ اشتباه تایپی باشد،

را بدست آورده ، دلیل خود را شرح دهید!

الف) از توزیع پواسون استفاده می کنیم:

$$\lambda=2\Rightarrow P(X=0)=\frac{e^{-2}2^0}{0!}=e^{-2}$$

ب)

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-\frac{e^{-2}2^0}{0!}-\frac{e^{-2}2^1}{1!}$$

$$=1-3e^{-2}$$

۵۲ – متوسط تعداد هواپیماهای مسافربری که در ماه دچـار حادثـه مـی شـوند در سـطح جهان برابر با ۳/۵ هواپیما است. احتمال پیشامدهای زیر را بدست آورید.

الف) در ماه آینده حداقل دو حادثه اتفاق افتد

ب) حداکثر یک حادثه در ماه آینده اتفاق افتد

دلیل خود را شرح دهید!

الف)

$$\lambda = ۳/۵ \Rightarrow P(X \geq ۲) = ۱ - \frac{e^{-۳/۵}(۳/۵)^{۰}}{۰!} - \frac{e^{-۳/۵}(۳/۵)^{۱}}{۱!}$$

$$= ۱ - e^{-۳/۵} - (۳/۵)e^{-۳/۵} = ۱ - ۴/۵e^{-۳/۵}$$

ب)

$$P(X \geq ۱) = P(X = ۰) + P(X = ۱) = ۴/۵e^{-۳/۵}$$

۵۳- *

۵۴ – فرض کنید متوسط تعداد اتومبیل هایی که درهفته در یک بزرگراه متوقف مـی شـونـد برابر با ۲/۲ باشد. احتمال پیشامد های زیر را تقریب بزنید.

الف) هیچ اتومبیلی درهفته آینده متوقف نشود.

ب) حداقل ۲ اتومبیل در هفته آینده متوقف شوند.

الف)

$$P(X = ۰) = \frac{e^{-۲/۲}(۲/۲)^{۰}}{۰!} = e^{-۲/۲}$$

ب)

$$p(x \geq ۲) = ۱ - p(X < ۲) = ۱ - \frac{e^{-۲/۲}(۲/۲)^{۰}}{۰!} - \frac{e^{-۲/۲}(۲/۲)^{۱}}{۱!}$$

$$= ۱ - ۳/۲e^{-۲/۲}$$

۵۵ – یک موسسه انتشاراتی ۲ ماشین نویس جدیـد اسـتخدام مـی کنـد. ماشـین نویـس اول بطور متوسط در هر مقاله ۳ اشتباه و ماشین نویس دوم بطور متوسط ۴/۲ اشتباه تایپی دارند. اگر مقاله شما با شانس برابر توسط یکی از دو ماشین نویس تهیه شود. احتمال اینکـه مقالـه هیچ غلط تایپی نداشته باشد را بدست آورید.

A – پیشامد اینکه ماشین نویس اول غلط نداشته باشد.

B – پیشامد اینکه ماشین نویس دوم غلط نداشته باشد.

$$P(A)=P(X=\cdot)=\frac{e^{-۳}(۳)^{\cdot}}{\cdot!}=e^{-۳},P(B)=\frac{e^{-۴/۲}(۴/۲)^{\cdot}}{\cdot!}=e^{-۴/۲}$$

پس احتمال اینکه مقاله هیچ غلط تایپی نداشته باشد برابر است با :

$$P(X)=P(X|A)P(A)+P(X|B)P(B)=?$$
$$=(e^{-۳})(\frac{۱}{۲})+(e^{-۴/۲})(\frac{۱}{۲})=\cdot/\cdot۳۲$$

۵۶- چند نفر لازم است تا احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در روز تولد شما بدنیا آمده باشد بیش از $\frac{۱}{۲}$ گردد؟

$$p(x\geq ۱)=۱-p(X=\cdot)=۱-\frac{(۳۶۵)\times\cdots\times(۳۶۵-n+۱)}{(۳۶۵)^{n}}$$

احتمال فوق باید بزرگتر از $\left(\frac{۱}{۲}\right)$ باشد لذا داریم:

$$\frac{(۳۶۵)(۳۶۴)\cdots(۳۶۵-n+۱)}{(۳۶۵)^{n}}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow n=۳۶۵\log(۲)\approx ۱۱\cdot$$

۵۷ - فرض کنید تعداد حوادثی که در یک بزرگراه در روزاتفاق می افتد یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda=۳$ باشد.

الف) احتمال اینکه امروز حداقل ۳ حادثه اتفاق افتد را بدست آورید.

ب) قسمت (الف) را با این فرض که امروز حداقل یک حادثه اتفاق افتاده است تکرارکنید.

الف)

$$P(X\geq ۳)=۱-P(X=\cdot)-P(X=۱)-P(X=۲)$$
$$=۱-\frac{e^{-۳}۳^{\cdot}}{\cdot!}-\frac{e^{-۳}۳^{۱}}{۱!}-\frac{e^{-۳}۳^{۲}}{۲!}=۱-۸/۵e^{-۳}$$

ب)

$$P(X\geq ۳)=۱-P(\cdot<X<۳)=۱-P(X=۱)-P(X=۲)$$
$$=۱-\frac{e^{-۳}۳^{۱}}{۱!}-\frac{e^{-۳}۳^{۲}}{۲!}=۱-۷/۵e^{-۳}$$

۵۸ - تقریب پواسون را با مقدار صحیح احتمال دو جمله ای در حالات زیر مقایسه کنید.

الف) $P\{X=۲\}, n=۸, P=۰/۱$

ب) $P\{X=۹\}, n=۱۰, P=۰/۹۵$

ج) $P\{X=۰\}, n=۱۰, P=۰/۱$

د) $P\{X=۴\}, n=۹, P=۰/۲$

الف)

$$P(X=۲)=\binom{۸}{۲}(۰/۱)^{۲}(۰/۹)^{۶}=(۰/۱۴۸۸)$$

$$\lambda=np=۰/۸ \Rightarrow P(X=۲)=\frac{e^{-۰/۸}(۰/۸)^{۲}}{۲!}=۰/۱۴۳۷$$

ب)

$$P(X=۹)=\binom{۱۰}{۹}(۰/۹۵)^{۹}(۰/۰۵)^{۱}=۰/۳۱۵$$

$$\lambda=np=۹/۵ \Rightarrow P(X=۹)=\frac{e^{-۹/۵}(۹/۵)^{۹}}{۹!}=۰/۱۳$$

ج)

$$P(X=۰)=\binom{۱۰}{۰}(۰/۱)^{۰}(۰/۹)^{۱۰}=۰/۳۴۸۶$$

$$\lambda=np=۱ \Rightarrow P(X=۰)=\frac{e^{-۱}(۱)^{۰}}{۰!}=۰/۳۶۷۸$$

د)

$$P(X=۴)=\binom{۹}{۴}(۰/۲)^{۴}(۰/۸)^{۵}=۰/۰۶۶$$

$$\lambda=np \Rightarrow P(X=۴)=\frac{e^{-۱/۸}(۱/۸)^{۴}}{۴!}=۰/۰۷۲$$

۵۹ - اگر بلیط شرکت در یک بازی را برای انجام ۵۰ بازی خریداری کنید و در هر بازی، شانس برنده شدن شما $\frac{۱}{۱۰۰}$ باشد. احتمال تقریبی برنده شدن را در حالات زیر بدست آورید.

الف) حداقل یک مرتبه ب) یک مرتبه ج) حداقل دو مرتبه

الف)

$$\lambda=np=۰/۵$$

$$P(X\geq ۱)=۱-P(X=۰)=۱-e^{-۰/۵}=۰/۳۹۳۵$$

ب) $P(X=۱)=\dfrac{e^{-۰/۵}(۰/۵)}{۱!}=۰/۳۰۳۲۶$

ج) $P(X\geq ۲)=۱-P(X=۰)-P(X=۱)=۰/۰۹۰۲$

۶۰ - تعداد دفعاتی که یک فرد در سال دچار سرماخوردگی می شود یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $\lambda=۵$ است. فرض کنید داروی جدیدی که مقدار زیادی ویتامین C دارد تهیه شده بطوریکه پارامتر پواسون را برای ۷۵ درصد جامعه به $\lambda=۳$ کاهش می دهد و برای بقیه ۲۵ درصد هیچ تأثیری ندارد. اگر فردی دارو را استفاده کرده و ۲ مرتبه سرماخوردگی داشته باشد با چه احتمالی دارو برای او مؤثر بوده است؟

A = پیشامد اینکه دارو مؤثر باشد. **B** = پیشامد اینکه فرد دو مرتبه سرماخوردگی داشته باشد.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{(۰/۷۵)\left[\frac{e^{-۳}۳^{۲}}{۲!}\right]}{(۰/۷۵)\left[\frac{e^{-۳}۳^{۲}}{۲!}\right]+(۰/۲۵)\left[\frac{e^{-۵}۵^{۲}}{۲!}\right]}$$

$$=\frac{۰/۱۶۸}{۰/۱۸۹}=۰/۸۸۸$$

۶۱- ※

۶۲- ※

۶۳ - افراد با نرخ ۱ نفر در هر دو دقیقه وارد یک فروشگاه می شوند.

الف) احتمال اینکه هیچکس در فاصله ساعت ۱۲:۰۰ تا ۱۲:۰۵ وارد نشود را بدست آورید.

ب) احتمال اینکه حداقل ۴ نفر در آن زمان وارد فروشگاه شوند را بدست آورید.

چون در هر دو دقیقه ۱ نفر وارد فروشگاه می شوند واحد، ۲ می باشد.

الف) $P\{N(t)=۰\}=\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{۰}}{۰!}=\dfrac{e^{-\frac{۱}{۲}(۵)}\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۰}}{۰!}=۰/۰۸۲۱$

ب) $P\{N(t)\geq ۴\}=۱-P\{N(t)<۴\}$

$$=1-e^{-۲/۵}-\frac{e^{-۲/۵}(۲/۵)^{۱}}{۱!}-\frac{e^{-۲/۵}(۲/۵)^{۲}}{۲!}-\frac{e^{-۲/۵}(۲/۵)^{۳}}{۳!}$$

$$=۰/۲۴۲۴$$

۶۴ - نرخ خودکشی در یک ایالت آمریکا برابر با ۱ خودکشی در هر ۱۰۰۰۰۰ نفر در ماه گزارش شده است.

الف) احتمال اینکه در یک شهر ۴۰۰۰۰۰ نفری آن ایالت حداقل ۸ خودکشی در ماه اتفاق افتد را بدست آورید.

ب) احتمال اینکه برای حداقل ۲ ماه از سال ، در هر ماه حداقل ۸ خودکشی باشد را بدست آورید.

ج) اگر ماه فعلی را شماره ۱ بنامیم احتمال اینکه اولین ماهی که حداقل n خودکشی وجود دارد ماه شماره i $(i\geq ۱)$ باشد را بدست آورید چه فرضهایی را در نظر گرفته اید؟

با توجه به فرض مسأله $\lambda=\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}$ می باشد.

الف)
$$\lambda t=\frac{۴۰۰۰۰۰}{۱۰۰۰۰۰}=۴\Rightarrow P\{N(t)\geq ۸\}=۱-p\{N(t)<۸\}$$

$$=۱-P\{N(t)=۰\}-\cdots-P\{N(t)=۷\}=۰/۰۵۱$$

ب)
$$P\{X\geq ۲\}=۱-P\{x<۲\}=۱-p\{x=۰\}-p\{x=۱\}$$

$$=۱-\binom{۱۲}{۰}(۰/۰۵۱۱)^{۰}(۰/۹۴۸۹)^{۱۲}-\binom{۱۲}{۱}(۰/۰۵۱۱)^{۱}(۰/۹۴۸۹)^{۱۱}$$

$$=۰/۱۲۲۷$$

۶۵ - هر یک از ۵۰۰ سرباز یک پادگان ، مستقل از یکدیگر با احتمال ۰/۰۰۱ دارای بیماری خاصی هستنداین بیماری را می توان باآزمایش خون تشخیص داد و لذا برای سهولت نمونه خون ۵۰۰ سرباز را مخلوط نموده و آزمایش کرده اند.

الف) احتمال تقریبی اینکه نتیجه آزمایش مثبت باشد ، یعنی حداقل یک نفر دارای بیماری باشد را بدست آورید.

حال فرض کنید که نتیجه آزمایش مثبت است

ب) با این شرط احتمال اینکه بیش از یک نفر بیمار باشند چقدر است؟

فرض کنید یکی از سرباز ها می داند بیمار است.

ج) بیمار مورد نظر در مورد احتمال اینکه بیش از یک نفر بیمار باشند چه ایده ای دارد؟

چون نتیجه آزمایش خونهای مخلوط شده مثبت است ، مسئولین تصمیمی میگیرند که افراد را بطور جداگانه مورد آزمایش قرار دهندو نتیجه اولین $(i-1)$ آزمایش منفی و i امین آزمایش که روی فرد مورد نظر انجام گرفت نتیجه اش مثبت بود.

د) با اطلاعات فوق احتمال اینکه هر یک از افراد باقیمانده دارای بیماری باشندرا بصورت تابعی از i بدست آورید

الف)

$$P(X\geq ۱)=۱-P(X=۰)=۱-\binom{۵۰۰}{۰}(۰/۰۰۱)^۰(۰/۹۹۹)^{۵۰۰}$$

$$=۰/۳۹۳۶$$

ب)

$$p\{x>۱|x>۰\}=\frac{p\{(x>۱)\cap(x>۰)\}}{p(x>۰)}=\frac{P(x>۱)}{p(x>۰)}$$

$$=\frac{۱-p(x\leq ۱)}{۱-p(x=۰)}=۰/۲۲۹$$

ج) چون خود فرض می داند یکی از سربازان بیمار است پس آن را از بقیه جدا کرده و احتمال اینکه حداقل یک نفر دیگر بیمار باشد را محاسبه می کنیم:

$$P(X\geq ۱)=۱-P(X=۰)=۱-\binom{۴۹۹}{۰}(۰/۹۹۹)^{۴۹۹}=۰/۳۹۳$$

۶۶ - یک گردونه بازی که شامل ۳۸ عدد بصورت اعداد ۰ تا ۳۶ و عدد ۰۰ (دوصفر) است را در نظر بگیرید. اگر فردی همواره روی یکی از نتایج ۱تا ۱۲ شرط بندی کند ، احتمال پیشامد های زیر را بدست آورید.

الف) ۵ شرط اولیه را ببازد.

ب) اولین برد او در چهارمین شرط بندی اتفاق افتد.

الف) چون احتمال برد $\left(\frac{۱۲}{۳۸}\right)$ می باشد لذا احتمال باخت $\left(\frac{۲۶}{۳۸}\right)$ است.

و چون نتایج مستقل از یکدیگر هستند پس : $P(X)=\left(\frac{۲۶}{۳۸}\right)^{۵}=۰/۱۵$

ب) بر اساس توزیع هندسی داریم: $P(X=۴)=\left(\frac{۱۲}{۳۸}\right)\left(\frac{۲۶}{۳۸}\right)^{۳}=۰/۱۰۱۲$

۶۷ - دو تیم ورزشی یک سری بازی انجام می دهند و اولین تیمی که ۴ مرتبه برنده می شود بعنوان برنده نهایی انتخاب می شود فرض کنید یکی از تیم ها قوی تر از دیگری است بطوریکه احتمال برد آن در هر بازی مستقل از بازی های دیگر برابربا ۰/۶ است . احتمال اینکه تیم قوی تر i بازی را ببرد بدست آورید. این احتمال را برای ۷ و ۶ و ۵ و ۴ = i محاسبه کنید احتمال برنده نهایی شدن تیم قوی تر را با احتمال آن تیم ۲ بازی از ۳ بازی را ببرد مقایسه کنید.

$$P(X=i)=\binom{i-۱}{۴-۱}(۰/۶)^{۴}(۰/۴)^{i-۴}$$

$$P(X=۴)=(۰/۶)^{۴}(۰/۴)=۰/۱۲۹۶,\ p(x=۵)=۰/۲$$

$$P(X=۶)=\binom{۵}{۳}(۰/۶)^{۴}(۰/۴)^{۲}=۰/۲۱,\ p(x=۷)=۰/۱۶۵۸$$

احتمال اینکه ۲ بازی از ۳ بازی را ببرد: $P(X=۲)=\binom{۳}{۲}(۰/۶)^{۲}(۰/۴)=۰/۴۳۲$

۶۸- در مساله ۶۷ فرض کنید که دو تیم با هم بازی کرده و احتمال برد هر تیم $\frac{۱}{۲}$ باشد. در این صورت امید ریاضی تعداد بازیها را بدست آورید.

$$E(x)=(۴)p(x=۴)+(۵)p(x=۵)+(۶)p(x=۶)+(۷)p(x=۷)$$

$$=۴\left[(۰/۵)^{۴}\right]+(۵)\left[\binom{۴}{۳}(۰/۵)^{۴}(۰/۵)\right]+\cdots+(۷)\left[\binom{۶}{۳}(۰/۵)^{۴}(۰/۵)^{۳}\right]$$

$$=۲/۹۰۶۲۵$$

و اگر بازیها به صورت رفت و برگشت باشد داریم: $E(x)=۵/۸۱۲۵$

۶۹- به خبرنگاری لیست افراد بانفوذی را داده اند که بایستی با آنها مصاحبه کند اگر خبرنگار لازم باشد که با ۵ نفر مصاحبه کند و هر فرد بطور مستقل با احتمال $\frac{۲}{۳}$ موافقت نماید که با او مصاحبه شود . احتمال اینکه لیست وی قادر به تأمین تعداد افراد مورد نیاز باشد را در هر یک از حالات زیر بدست آورید.

الف) لیست شامل ۵ نفر باشد

ب) لیست شامل ۸ نفر باشد

برای قسمت (ب) احتمال اینکه خبرنگار بتواند با ج) ۶ نفر ، د) ۷ نفر از افردا لیست مصاحبه کند چقدر است؟

الف) $$P(X=۵)=\binom{۵}{۵}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۵}=\frac{۳۲}{۲۴۳}$$

ب) $$P(X\geq ۵)=\binom{۸}{۵}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۵}\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۳}+\cdots+\binom{۸}{۸}\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۸}$$

$$=\frac{۴۸۶۴}{۶۵۶۱}$$

۷۰- یک سکه منظم را بطور متوالی پرتاب میکنیم تا شیر برای دهمین مرتبه ظاهر شود اگر x نشان دهنده تعداد خط های ظاهر شده باشد . تابع احتمال x رابدست آورید.

بر اساس توزیع دو جمله ای منفی داریم:

$$P(X=۱۰)=\binom{x-۱}{۱۰-۱}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۰}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x-۱۰} \quad =\binom{x-۱}{۹}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$$

۷۱ - مساله کبریت باناخ (مثال ۹-۵) را وقتی که قوطی کبریت طرف چپ او از ابتدا شامل N_1 چوب کبریت و قوطی کبریت سمت راست او N_2 چوب کبریت را داشته باشد حل کنید.

چون در مسأله کبریت با ناخ فرض بر آن است که در قوطی دوم **k** چوب کبریت باشد پس باید دز زمانی که N_1+ امین بار به قوطی سمت چپ مراجعه می شود کبریت تمام شده باشد.

پس بر اساس توزیع دو جمله ای منفی داریم:

$$p(x)=\binom{N_2-K+N_1+1-1}{N_1+1-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N_1+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N_2-K}$$

$$p(x)=\binom{N_2+N_1-K}{N_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N_1+N_2-K+1}$$

و چون احتمال برداشتن از هر یک از دو قوطی یکی است داریم:

$$2p(x)=\binom{N_2+N_1-K}{N_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{N_1+N_2-K}$$

۷۲ - در مساله کبریت باناخ احتمال اینکه در لحظه ای که قوطی اول خالی می شود (در مقابل کشف خالی بودن آن) ، قوطی دیگر k چوب کبریت داشته باشد را بدست آورید.

به مسأله قبل مراجعه شود.

۷۳ - ظرفی شامل ۴ توپ سفید و ۴ توپ سیاه است به تصادف ۴توپ از ظرف انتخاب می کنیم اگر ۲ توپ سفید و ۲ توپ سیاه باشد، آزمایش را متوقف می کنیم در غیر اینصورت توپها را به ظرف برگردانده ودوباره ۴ توپ به تصادف انتخاب می کنیم این آزمایش آنقدر تکرار میشود، تا ۲ توپ از ۴ توپ سفید باشد .احتمال اینکه n مرتبه انتخاب توپها صورت پذیرد را بدست آورید.

با توجه به توزیع هندسی و فوق هندسی داریم:

$$P=\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}}=\frac{36}{70}$$

$$1-P=\frac{34}{70}\Rightarrow P(X)=\frac{36}{70}\times\left(\frac{34}{70}\right)^{N-1}=\frac{18(17)^{N-}}{(35)^{N}}$$

۷۴ - در مساله ۶۷ احتمال شرطی پیشامد های زیر را برای تیم قوی تر بدست آورید.

الف) برنده نهایی باشد بشرط اینکه تیم قوی تر اولین بازی را ببرد.

ب) اولین بازی را برده باشد بشرط اینکه برنده نهایی شده است.

الف) **A** = پیشامد اینکه تیم قوی تر برنده نهایی باشد. **B** = پیشامد اینکه تیم قوی تر بازی اول خود را ببرد.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|A')P(A')}$$

$$=\frac{\binom{۶}{۳}(۰/۶)^{۳}(۰/۴)^{۳}}{\binom{۶}{۳}(۰/۶)^{۳}(۰/۴)^{۳}+\left[\binom{۶}{۲}(۰/۶)^{۲}(۰/۴)^{۴}+\binom{۶}{۱}(۰/۶)^{۱}(۰/۴)^{۵}\right]}=۰/۶۱۲۲$$

ب)

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\binom{۶}{۳}(۰/۶)^{۳}(۰/۴)^{۳}}{\binom{۷}{۴}(۰/۶)^{۴}(۰/۴)^{۳}}$$

$$=\frac{۲۰}{۲۱}=۰/۹۵۲۳$$

۷۵- *

۷۶- *

۷۷ - یک خریدار قطعات ترانزیستور ، انها را در محموله های ۲۰ تایی خریداری میکند سیاست او این است که از هر محموله ۴ قطعه را به تصادف انتخاب کرده و اگر همه آنها سالم باشند محموله را می پذیرد اگر هر قطعه در محموله مستقل از سایر قطعات با احتمال ۰/۱ معیوب باشد چه نسبتی از محموله ها رد می شوند.

احتمال رد شدن برابر است با :

$$p(x\geq ۱)=۱-P(X=۰)=۱-\binom{۴}{۰}(۰/۱)^{۰}(۰/۹)^{۴}$$

$$p(x\geq ۱)=۰/۳۴۳۹$$