دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران جنوب

دانشکده مهندسی صنایع

جزوه درس تئوری احتمالات

استاد : دکتر محمدی بیدهندی

(ویرایش چهارم)

سال 1394

فصل اول

اصول احتمال و قوانین شمارش

1- مفاهیم اولیه احتمالات

نظریه احتمالات در قرن هفدهم در مورد بازیهای شانسی کاربرد بیشتری یافت و توسط ریاضیدانانی همچون پاسکال و فرما مورد مطالعه قرارگرفت . این نظریه بعدها توسط دانشمندان دیگری همچون کولموگروف روسی توسعه پیدا نمود . در ذیل به معرفی برخی مفاهیم اولیه احتمالات پرداخته میشود :

آزمایش تصادفی (Random Experiment) : آزمایش تصادفی عملی است که نتیجه اش را نتوان با قاطعیت پیش بینی کرد . به عنوان نمونه بررسی باز یا بسته بودن کلید برق ، پرتاب یک تاس ، شمارش تعداد معایب یک توپ پارچه و ... به عنوان یک آزمایش تصادفی (آزمایش) تلقی میشوند .

فضای نمونه ای (Sample Space) : فضای نمونه ای یک آزمایش عبارت از مجموعه تمام نتایج ممکن آن آزمایش میباشد (S).

فضاهای نمونه ای معمولاً برحسب تعداد عناصری که دارند تقسیم بندی می شوند . اگر فضای نمونه شامل تعداد متناهی از عناصر یا تعدادی نامتناهی ولی شمارا از عناصر باشد ، آن را گسسته می گویند . مانند : پرتاب یک سکه ، پرتاب یک تاس .

چنانچه فضای نمونه شامل تعداد ناشمار از عناصر باشد ، آن را فضای نمونه پیوسته می گویند . مانند مسافتی که ماشینی در یک آزمایش طی می کند ، و یا مدت زمان لازم برای انجام یک آزمایش شیمیایی .

پیشامد (Event) : هر زیر مجموعه از فضای نمونه یک پیشامد است . (تعداد پیشامدها 2^n)

یک پیشامد روی می دهد (واقع می شود) وقتی که یکی از عضوهایش نتیجه آزمایش باشد .

پیشامدهای ناسازگار : دو پیشامد A و B را ناسازگار می گوئیم اگر داشته باشیم : $A \cap B = \phi$.

2- احتمال (Probability)

2-1- مفهوم احتمال از دیدگاه کلاسیک

در یک آزمایش که فضای نمونه آن S میباشد ، احتمال وقوع پیشامد A را می خواهیم محاسبه نمائیم . اگر فضای نمونه N عنصر داشته باشد و پیشامد A دارای n عنصر باشد ، احتمال وقوع پیشامد A برابر است با :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

این تعریف زمانی قابل قبول است که فضای نمونه متناهی و عناصر فضای نمونه هم شانس باشند .

2-2- مفهوم احتمال به عنوان فراوانی نسبی

احتمال وقوع یک پیشامد برابر نسبت تعداد دفعاتی است که پیشامد در تکرار زیاد رخ خواهد داد .

اگر تعداد دفعات وقوع پیشامد A در k بار تکرار آزمایش را با n_A نشان دهیم خواهیم داشت :

$$P(A)=\lim_{k\to\infty}\frac{n_A}{k}$$

2-3- مفهوم احتمال با روش اصل موضوعی

احتمال ها مقادیر یک تابع مجموعه ای هستند که این تابع ، به زیر مجموعه های مختلف فضای نمونه ای اعداد حقیقی نسبت میدهند . این تابع اندازه احتمال نامیده میشود . این تابع (اندازه احتمال) باید اصول موضوعه زیر را برآورده سازد .

اصول موضوع احتمالات

از مفهوم فراوانی نسبی در احتمالات دو نتیجه بطور مستقیم عاید می شود :

- فراوانی نسبی چیزی که مطمئن هستیم رخ خواهد داد باید برابر 1 باشد ، یعنی احتمال وقوع آن باید مساوی 1 باشد . مثلاً اگر سکه ای را یک بار پرتاب کنیم ، و پیشامد مورد نظر را وقوع شیر یا خط در نظر بگیریم ، فراوانی نسبی این پیشامد یا به عبارت دیگر احتمال وقوع این پیشامد باید 1 باشد . این اصل در واقع معادل این است که $P(S)=1$.
- فراوانی نسبی هرگز منفی نمی شود . بنابراین احتمال هر پیشامدی باید نامنفی باشد . این اصل در واقع معادل این است که برای هر پیشامد A در فضای نمونه S داریم : $P(A)\geq 0$.

اصل دیگری هم وجود دارد که بطور غیر مستقیم قابل بیان میباشد و آن خاصیت جمع پذیری احتمالات است . اگر آزمایش پرتاب یک تاس را در نظر بگیریم ، بطور منطقی انتظار داریم که احتمال مشاهده عدد 1 یا 2 ، برابر مجموع احتمالات مربوطه هستند .

اصول موضوعه احتمالات فقط وقتی بکار می رود که فضای نمونه گسسته باشد و نیازی به برهان ندارند .

بطور خلاصه :

- اصل موضوع 1 : $P(S)=1$.
- اصل موضوع 2 : $P(A)\geq 0; \quad \forall A\subseteq S$.
- اصول موضوع 3 : $P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots$

  هر گاه پیشامدها دو به دو ناسازگار باشند .

میتوان نشان داد که مفهوم احتمال با روش اصل موضوعی با مفهوم احتمال از دیدگاه کلاسیک و مفهوم احتمال از دیدگاه فراوانی نسبی سازگار است .

تعریف : یک پیشامد تک عضوی A زیر مجموعه ای از S است که تنها یک عضو از S را شامل میشود .

قضیه : هرگاه S فضای نمونه و $A \subseteq S$ پیشامدی دلخواه باشد آنگاه :

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$$

که در آن A_1 ، A_2 و ... و A_k پیشامدهای تک عضوی متمایزند و $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$.

بنابر این برای محاسبه احتمال قضیه زیر را خواهیم داشت :

قضیه : چنانچه فضای نمونه گسسته و عناصر فضای نمونه هم شانس باشند ، خواهیم داشت :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال : اگر سکه متعادلی را دوبار پرتاب کنیم ، احتمال بدست آوردن حداقل یک شیر چقدر است ؟

$S=\{HH , HT , TH , TT\}$ $\qquad$ $A= \{HH , HT , TH\}$

$$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

مثال : در یک تاس احتمال وقوع هر عدد فرد دو برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است . احتمال وقوع عددی بزرگتر از 3 را پیدا کنید .

$A= \{4 , 5 , 6\}$ $\qquad$ $S= \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$

در این مثال عناصر فضای نمونه هم شانس نیستند .

احتمال وقوع هر عدد زوج $=w$ $\qquad$ احتمال وقوع هر عدد فرد $=2w$

$$2w + w + 2w + w + 2w + w = 1 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{9}$$

$$P(A) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

3- برخی قاعده های احتمال

با استفاده از اصول موضوع احتمال ، میتوان بسیاری از قاعده های دیگر را که کاربردهای مهمی دارند ، نتیجه گرفت .

قضیه : برای هر فضای نمونه S ، $P(\phi)=0$ است .

قضیه : اگر A و $\bar{A}$ پیشامدهای متمم در فضای نمونه ای S باشند آنگاه : $P(\bar{A})=1-P(A)$.

قضیه : اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه ای S باشند و $A\subseteq B$ آنگاه : $P(A)\leq P(B)$.

قضیه : برای هر پیشامد A داریم : $0\leq P(A)\leq 1$.

قضیه : اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه ای S باشند ، آنگاه خواهیم داشت :

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$$

قضیه : اگر A و B و C سه پیشامد دلخواه در فضای نمونه ای S باشند ، آنگاه خواهیم داشت :

$$P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\bigcap B)-P(A\bigcap C)-P(B\bigcap C)+P(A\bigcap B\bigcap C)$$

4- قوانین شمارش

جواب بسیاری از مسائل احتمال به امکان شمردن تعداد عضوهای مجموعه بستگی دارند . اولین روشی که درباره آن صحبت خواهیم کرد قانون حاصلضرب یا اصل اساسی شمارش نام دارد .

قانون حاصلضرب (اصل اساسی شمارش) : اگر عملی شامل دو مرحله باشد که مرحله اول بتواند به n_1 راه انجام شود و مرحله دوم برای هر یک از این راهها به n_2 راه صورت گیرد ، آنگاه عمل مزبور کلاً میتواند به $n_1 \times n_2$ راه انجام گیرد .

تعمیم اصل اساسی شمارش : اگر عملی مرکب از k مرحله باشد ، بطوری که مرحله اول بتواند به n_1 راه انجام شود و برای هر یک از این راهها ، مرحله دوم بتواند به n_2 راه صورت گیرد ، و به همین ترتیب مرحله k ام آن را بتوان به n_k طریق انجام داد ، آنگاه کل عمل میتواند به $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ راه صورت پذیرد .

مثال : از شهر A به شهر B دو راه و از شهر B به شهر C سه راه وجود دارد . بنابراین به شش طریق می توان از A به C رفت .

مثال : چند پلاک اتومبیل 7 شماره ای که سه شماره اول آن از حروف الفبایی لاتین و چهار شماره آخر آن از اعداد 0 تا 9 تشکیل شده است ، می توان تهیه نمود ؟

$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 175,760,000$

4-1- ترتیب یا جایگشت (Permutation)

چیدمان n عنصر با نظم معینی را یک ترتیب یا جایگشت آن n عنصر می نامند .

چند ترتیب متفاوت از حروف c , b , a امکان پذیر است ؟ با استفاده از اصل اساسی شمارش می توان گفت که $3 \times 2 \times 1 = 6$ ترتیب (جایگشت) متفاوت خواهیم داشت .

حال فرض کنید که مجموعه دارای n عضو است . بنابراین تعداد جایگشت ها برابر است با :

$$n(n-1)(n-2)\ldots\times 3\times 2\times 1=n!$$

تعریف : تعداد r تایی های مرتبی را که میتوان با بکار بردن n عنصر متمایز $(r\leq n)$ساخت ، تعداد ترتیب های n عنصر درگروههای r تایی یا ترتیب های n عنصر r به r می نامیم و با نماد P_n^r نشان می دهیم .

(هر r تایی مرتب دارای r محل میباشد)

$$P_n^r=n(n-1)\ldots(n-r+1)=n(n-1)\ldots(n-r+1)\times\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$P_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : به چند طریق می توان از حروف F , E , D ,C , B , A کلمات سه حرفی ساخت بی آنکه حرفی تکرار شود؟ $P_6^3=\frac{6!}{3!}=120$

چنانچه تکرار مجاز باشد : $6\times 6\times 6=6^3=216$ . .

قضیه : تعداد جایگشت های n عنصر که n_1 تای آنها از نوع اول ، n_2 تای آنها از نوع دوم ، ....و n_k تای آنها از نوع k ام است ، بگونه ای که $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ ، برابر است با :

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k}n_i!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

مثال : با حروف کلمه احتمالات چند جایگشت مختلف میتوان ساخت ؟

$n_1=3\quad n_2=1\quad n_3=2\quad n_4=1\quad n_5=1\qquad n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=8$

$$\frac{8!}{3!2!}=8\times 7\times 5\times 4\times 3=3360$$

2-4- ترکیب (Combination)

وقتی که ترتیب عناصر مطرح نباشد ، مسئله ترکیب بوجود می آید . در واقع ترکیب مفهومی نظیر زیر مجموعه را دارد .

قضیه : تعداد ترکیب های r عنصر منتخب از مجموعه ای با n عنصر متمایز ، برابر است با :

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مقدار $\binom{n}{r}$ را غالباً ضریب دو جمله ای می نامند. زیرا در قضیه دو جمله ای نقش ضریب را دارد .

قضیه دوجمله ای : $(x+y)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r y^{n-r}$

مثال : از یک گروه متشکل از 5 زن و 7 مرد چند شورای مختلف 5 عضوی متشکل از 2 زن و 3 مرد میتوان انتخاب نمود ؟ $\binom{5}{2}\binom{7}{3}=350$.

اگر دو نفر از مردها نخواهند با هم در شورا انتخاب شوند ، آنگاه چند شورا می توان انتخاب نمود ؟

تعداد گروههای سه نفره مردان = تعداد گروههای سه نفری مردها بدون آن دو مرد +

تعداد گروههای سه نفری مردها با حضور یکی از آن دو مرد

$$=\binom{2}{0}\binom{5}{3}+\binom{2}{1}\binom{5}{2}=30$$

تعداد کل حالات ممکن انتخاب شورای 5 نفره = $30\binom{5}{2}=300$

قضیه : تعداد راههای ممکن برای تقسیم n عنصر به r گروه متفاوت که هرکدام به ترتیب دارای $n_1, n_2, \ldots, n_r$ عضو باشند ، بصورت زیر خواهد بود :

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!} \quad , \quad \sum_{i=1}^{r} n_i = n$$

اثبات :

$$\text{تعداد راههای انتخاب برای گروه } 1 = \binom{n}{n_1}$$

$$\text{تعداد راههای انتخاب برای گروه } 2 = \binom{n-n_1}{n_2}$$

$$\text{تعداد راههای انتخاب برای گروه } r = \binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r}$$

$$\text{تعداد حالات ممکن} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\ldots\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{r-1}}{n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$$

مثال: به چند طریق می توان هفت نفر را در یک اتاق سه تخته و دو اتاق دو تخته هتلی جای داد؟

$$n = 7 \quad n_1 = 3 \quad n_2 = 2 \quad n_3 = 2 \qquad \binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

مثال : فرض کنید 52 کارت از 4 رنگ مختلف که هر رنگ با شماره‌های 1 تا 13 مشخص شده اند،وجود دارد . این کارتها را به تصادف بین 4 نفر تقسیم می‌کنیم. احتمال اینکه هریک از 4 نفر کارت شماره یک را دریافت نمایند چقدر است ؟

راه حل) کل تعداد حالات ممکن برابر است با : $\begin{pmatrix} 52 \\ 13,13,13,13 \end{pmatrix}$.

برای محاسبه احتمال اینکه هر نفر کارت شماره یک را داشته باشد ابتدا این کارت را کنار گذاشته و 48 کارت باقیمانده را بین چهار نفر توزیع می‌کنیم که به تعداد $\begin{pmatrix} 48 \\ 12,12,12,12 \end{pmatrix}$ حالت امکان‌پذیر است .

حال به تعداد $4!$ حالت مختلف می‌توان 4 کارت باقیمانده را بین افراد توزیع نمود و در نتیجه احتمال پیشامد مربوطه برابر است با :

$$\frac{4!\begin{pmatrix} 48 \\ 12,12,12,12 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 52 \\ 13,13,13,13 \end{pmatrix}} = \frac{39\times 26\times 13}{51\times 50\times 49} \approx 0.105$$

5- احتمال شرطی

در بعضی از موارد به ما گفته می شود که چنانچه پیشامد A رخ داده باشد ، احتمال رخ دادن پیشامد دیگر B چقدر است ؟ چنانچه پیشامد A قبلاً رخ داده باشد ، در این صورت پیشامد A به عنوان فضای نمونه است زیرا می دانیم که هر $x \in \bar{A}$ رخ نداده است. بنابراین منطقی است که احتمال اینکه B نیز رخ داده باشد ، درصد نسبی وقوع توأم A و B به فرض وقوع A است.

مثال: یک سازمان وضعیت سرویس دهی 50 مرکز سرویس مجاز را مطالعه کرده است. نتایج در جدول زیر خلاصه شده است . اگر فردی یکی از مراکزی را انتخاب کند که ده سال یا بیشتر سابقه شغلی داشته باشد، احتمال اینکه مرکز انتخاب شده از مراکز مجاز خوب باشد چقدر است ؟

	ضعیف	خوب
سابقه ده سال یا بیشتر	4	16
سابقه کمتر از ده سال سال	20	10

A : انتخاب مرکزی با سابقه ده سال یا بیشتر

B : انتخاب مرکز خوب

در این حالت فضای نمونه کوچکتری شامل سطر اول جدول خواهیم داشت :

$$P(B|A)=\frac{16}{20}=0.8$$

$$P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

تعریف : اگر A و B دو پیشامد دلخواه در فضای نمونه S باشند و $P(A)\neq 0$، احتمال شرطی B به شرط A برابر است با :

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

نتیجه : اگر A و B دو پیشامد دلخواه در فضای نمونه S باشند، و $P(A)\neq 0$ ، آنگاه :

$$P(A\cap B)=P(A).P(B|A)$$

مثال : احتمال اینکه یکی از مراکز سرویس دهی که کمتر از ده سال اشتغال دارد سرویس خوبی ارائه دهد چقدر است ؟

$\bar{A}$: انتخاب مرکزی با سابقه کمتر از ده سال

$$P(B|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})}$$

$$P(\bar{A}\cap B)=\frac{10}{50}=0.2 \qquad P(\bar{A})=\frac{10+20}{50}=0.6 \qquad P(B|\bar{A})=\frac{0.2}{0.6}=\frac{1}{3}$$

مثال: از کیسه ای که دارای 4 توپ سفید و 8 توپ سیاه است . دو توپ به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می کنیم. مطلوبست :

الف) احتمال اینکه هردو توپ سفید باشند . ب) احتمال اینکه توپ دوم سفید باشد .

A : توپ اول سفید　　B : توب دوم سفید　　C : هر دو توپ سفید

الف)　$C = A \cap B$　　$P(C) = P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = \frac{4}{12} \times \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$

ب)

$$B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B), \quad (A \cap B) \cap (\bar{A} \cap B) = \phi$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})$$
$$= \frac{1}{11} + (\frac{8}{12} \times \frac{4}{11}) = \frac{1}{3}$$

قضیه: اگر A و B و C سه پیشامد دلخواه در فضای نمونه S باشند بگونه‌ای که : $P(A) \neq 0, P(A \cap B) \neq 0$ ، آنگاه :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B|A).P(C|A \cap B)$$

قضیه فوق بصورت زیر قابل تعمیم می‌باشد :

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1).P(E_2|E_1).P(E_3|E_1 \cap E_2)\ldots.P(E_n|E_1 \cap \ldots \cap E_{n-1})$$

6- پیشامدهای مستقل

دو پیشامد A و B را مستقل گویند ، اگر رخ دادن یا رخ ندادن هریک از آنها در احتمال رخ دادن دیگری تأثیری نداشته باشد . یعنی : $P(B|A) = P(B)$ و $P(A|B) = P(A)$.

بنابر این :　$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(A).P(B)$

تعریف : دو پیشامد A و B مستقل‌اند اگر و فقط اگر : $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

اگر دو پیشامد مستقل نباشند می گویند وابسته‌اند .

مثال : سکه‌ای سه بار پرتاب می‌شود و فرض می‌شود که نتایج ممکن هم شانس باشند. پیشامدهای A و B و C بصورت زیر تعریف می‌شوند :

A: رخ دادن شیر در هر یک از دو پرتاب اول　　B: رخ دادن خط در پرتاب سوم

C: رخ دادن دقیقاً دو خط در سه پرتاب

الف) نشان دهید که A و B مستقل‌اند .　　ب) نشان دهید که B و C وابسته‌اند .

$$A=\{HHH,HHT\} \quad B=\{HHT,HTT,THT,TTT\} \quad C=\{HTT,THT,TTH\}$$

الف) $P(A)=\frac{2}{8} \quad P(B)=\frac{4}{8} \quad P(A\cap B)=\frac{1}{8}=P(A).P(B)$

ب) $P(B)=\frac{4}{8} \quad P(C)=\frac{3}{8} \quad P(B\cap C)=\frac{2}{8} \qquad P(B\cap C)\neq P(B).P(C)$

قضیه: اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند آنگاه دو پیشامد A و $\bar{B}$ نیز مستقل‌اند .

اثبات : $A=(A\cap B)\cup(A\cap \bar{B})$ و $(A\cap B)\cap(A\cap \bar{B})=\phi$

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \bar{B})=P(A).P(B)+P(A\cap \bar{B})$$

$$\Rightarrow P(A\cap \bar{B})=P(A)(1-P(B))=P(A).P(\bar{B})$$

تعریف : پیشامدهای A_1 ، A_2 ، ... و A_k مستقل‌اند اگر و فقط اگر احتمال اشتراک هر 2 ، 3 ..... یا k تا از این پیشامدها مساوی حاصضرب احتمالهای متناظرشان باشد .

به عنوان مثال برای استقلال سه پیشامد A و B و C لازم است که :

- $P(A\cap B)=P(A).P(B)$
- $P(B\cap C)=P(B).P(C)$
- $P(A\cap C)=P(A).P(C)$
- $P(A\cap B\cap C)=P(A).(B).P(C)$

قابل ذکر است که سه یا چند پیشامد می‌توانند دوبدو مستقل باشند بدون آنکه کلاً مستقل باشند .

6-1- استقلال پیشامدهای مشروط

یکی از مفاهیم مهم در نظریه احتمال ، استقلال پیشامدهای مشروط است .

تعریف : پیشامدهای A_1 و A_2 به شرط پیشامد B مستقل هستند اگر در صورت وقوع پیشامد B احتمال شرطی اینکه ، A_1 اتفاق افتد با اطلاع از وقوع یا عدم وقوع A_2 تغییر نیابد . به عبارت دیگر A_1 و A_2 بشرط B مستقل هستند هر گاه :

$$P(A_1 | A_2 \cap B) = P(A_1 | B) \qquad P(A_2 | A_1 \cap B) = P(A_2 | B)$$

ویا به طور معادل می توان نوشت :

$$P(A_1 | A_2 \cap B) = P(A_1 | B) \Rightarrow \quad \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap B)}{P(A_2 \cap B)} = P(A_1 | B)$$

$$\frac{P(A_1 \cap A_2 | B).P(B)}{P(A_2 | B).P(B)} = P(A_1 | B) \Rightarrow \quad P(A_1 \cap A_2 | B) = P(A_1 | B).P(A_2 | B)$$

بنابراین A_1 و A_2 به شرط B مستقل هستند هر گاه داشته باشیم :

$$P(A_1 \cap A_2 | B) = P(A_1 | B).P(A_2 | B)$$

7- قضیه بیز

مسائل زیادی وجود دارد که در آنها نتیجه نهایی یک آزمایش به آنچه در مراحل میانی رخ می‌دهند بستگی دارد .

مثال : پروژه‌ای در دست داریم که عبارت از ساختن یک ساختمان است که ممکن است به علت بدی هوا به تأخیر بیافتد . فرض کنید که احتمال نامناسب بودن هوا 60٪ باشد. احتمال اینکه اگر هوا مناسب باشد کار به موقع انجام شود 85٪ و احتمال اینکه اگر هوا نامناسب باشد کار بموقع انجام شود 35٪ باشد . حال احتمال اینکه کار بموقع انجام شود را بدست آورید .

A: پیشامد تکمیل بموقع کار B: پیشامد نامناسب بودن هوا

$$P(A|\bar{B}) = 0.85 \qquad P(A|B) = 0.35 \qquad P(B) = 0.60$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \text{ و } (A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \phi$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B})$$

$$= 0.60 \times 0.35 + 0.40 \times 0.85 = 0.55$$

قضیه بیز :

اگر پیشامدهای B_1 ، B_2 ، ... ، B_k افرازی از فضای نمونه S باشند یعنی :

$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = S \qquad , \qquad \forall i \neq j : B_i \cap B_j = \phi$$

وهمچنین به ازای هر $i = 1.2....,k$ داشته باشیم : $P(B_i) \neq 0$ آنگاه :

الف) **(قاعده احتمال کل)** برای هر پیشامد A در S داریم :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A|B_i)$$

ب) **(قاعده بیز)** برای هر پیشامد A در S به گونه ای که $P(A) \neq 0$ باشد ، خواهیم داشت :

$$P(B_j | A) = \frac{P(B_j).P(A | B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A | B_i)} \qquad ; \; j=1,2,\ldots,k$$

اثبات :

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup ... \cup (A \cap B_k)$$

$$\forall i \neq j : (A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \phi$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + ... + P(A \cap B_k)$$

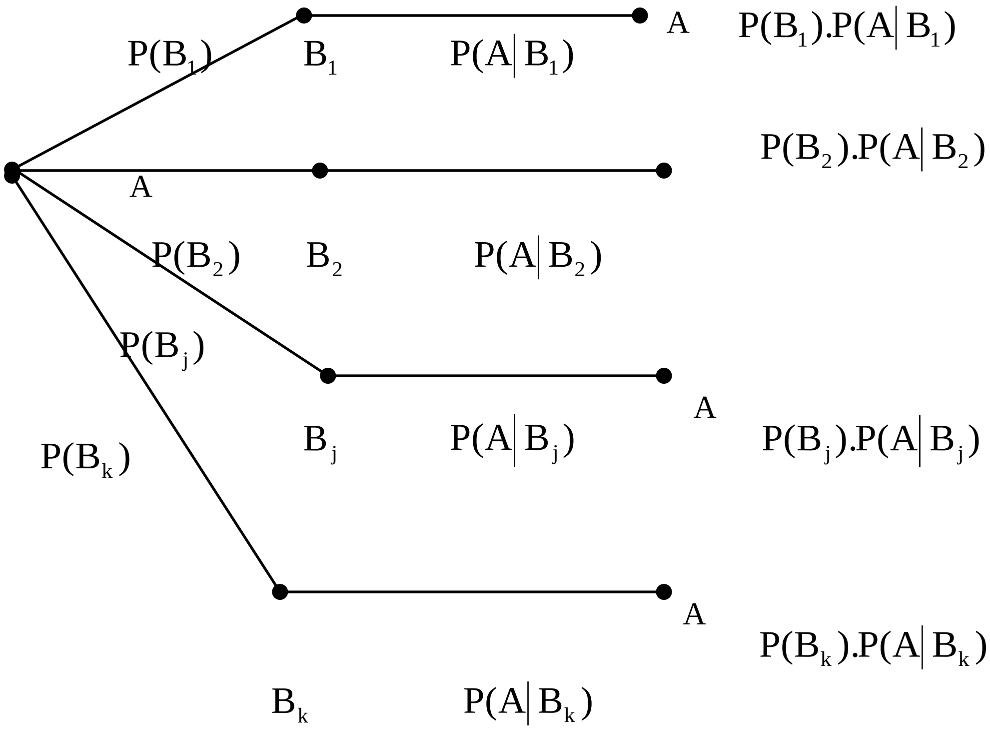
$$P(A) = P(B_1).P(A | B_1) + P(B_2).P(A | B_2) + ... + P(B_k).P(A | B_k)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A | B_i)$$

$$P(B_j | A) = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B_j) = P(B_j).P(A | B_j)$$

$$P(B_j | A) = \frac{P(B_j).P(A | B_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A | B_i)} \quad , j = 1,2,\ldots,k$$



با استفاده از نمودار درختی می‌توان گفت :

- احتمال اینکه به پیشامد A برسیم برابر مجموع احتمالات تمام راهها است .
- احتمال اینکه از راه شاخه j ام به پیشامد A برسیم ، به شرط آنکه از راه یکی از k شاخه نمودار به A رسیده باشیم ، برابر نسبت احتمال مربوط به j امین شاخه به مجموع احتمالهای مربوط به تمام k شاخه است .

مثال : اعضای یک شرکت از سه آژانس ، اتومبیل کرایه می کنند : از آژانس 1 به میزان 60٪ ، از آژانس 2 به میزان 30٪ و از آژانس 3 به میزان 10٪ . اگر 9٪ از اتومبیل های آژانس یک ، 20٪ از اتومبیل های آژانس دو و 6٪ از اتومبیل های آژانس سه در حین کار دچار خرابی گردند ، احتمال اینکه یک اتومبیل کرایه ای که به شرکت تحویل شده است دچار خرابی گردد چقدر است ؟

A: پیشامد خرابی اتومبیل تحویلی B_i : پیشامد کرایه اتومبیل از آژانس i ، $i = 1,2,3$

$P(B_1) = 0.60 \quad P(B_2) = 0.30 \quad P(B_3) = 0.10$

$P(A|B_1) = 0.09 \quad P(A|B_2) = 0.20 \quad P(A|B_3) = 0.06$

$$P(A) = P(B_1).P(A|B_1) + P(B_2).P(A|B_2) + P(B_3).P(A|B_3)$$
$$= 0.60\times0.09+0.30\times0.20+0.10\times0.06 = 0.12$$

با مراجعه به مثال قبل اگر اتومبیل کرایه ای که به شرکت تحویل شده است ، دچار خرابی شده باشد احتمال اینکه این اتومبیل متعلق به آژانس دو باشد چقدر است ؟

$$P(B_2 | A) = \frac{P(B_2).P(A|B_2)}{P(B_1).P(A|B_1) + P(B_2).P(A|B_2) + P(B_3).P(A|B_3)}$$

$$= \frac{0.30\times0.20}{0.60\times0.09+0.30\times0.20+0.10\times0.06} = \frac{0.06}{0.12} = 0.50$$

مثال : فرض کنید که سه کارت یکسان داریم که یکی از آنها هر دو طرفش قرمز ، دیگری هر دو طرفش سیاه و کارت سوم یک طرفش قرمز و طرف دیگر آن سیاه است . سه کارت را مخلوط نموده و یکی از آنها را به تصادف انتخاب نموده و روی زمین قرار می دهیم . اگر طرف بالای کارت انتخاب شده قرمز باشد احتمال اینکه طرف قرار گرفته روی زمین سیاه باشد چقدر است ؟

کارت انتخابی یک طرف قرمز و طرف دیگر سیاه : RB کارت انتخابی هر دو طرف سیاه : BB

کارت انتخاب شده هر دو طرف قرمز : RR پیشامد اینکه طرف بالای کارت انتخابی قرمز باشد : R

$$P(RB|R)=\frac{P(RB).P(R|RB)}{P(RR).P(R|RR)+P(RB).P(R|RB)+P(BB).P(R|BB)}$$

$$P(RB|R)=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 0}=\frac{1}{3}$$

مثال : فرض کنید هواپیمایی در آسمان مفقود شده و میدانیم که با احتمال یکسان در یکی از مناطق سه گانه موجود سقوط کرده است . علاوه بر این فرض کنید که اگر هواپیما در منطقه i ، (i=1,2,3) سقوط کرده باشد در صورت جستجوی آن منطقه با احتمال $1-\alpha$ پیدا خواهد شد . حال اگر بدانیم که جستجوی منطقه یک موفقیت آمیز نبوده است ، احتمال سقوط هواپیما در هر یک از مناطق را بدست آورید .

E : پیشامد ناموفق بودن جستجوی منطقه یک

R_i : پیشامد سقوط هواپیما در منطقه i $\quad$ i=1,2,3

$$P(R_1)=P(R_2)=P(R_3)=\frac{1}{3} \qquad P(E|R_1)=\alpha \;\; P(E|R_2)=P(E|R_3)=1$$

$$P\left(R_1|E\right)=\frac{P(E|R_1).P(R_1)}{P(E|R_1).P(R_1)+P(E|R_2).P(R_2)+P(E|R_3).P(R_3)}=\frac{\alpha}{\alpha+2}$$

$$P\left(R_2|E\right)=\frac{P(E|R_2).P(R_2)}{P(E|R_1).P(R_1)+P(E|R_2).P(R_2)+P(E|R_3).P(R_3)}=\frac{1}{\alpha+2}$$

$$P\left(R_3|E\right)=\frac{P(E|R_3).P(R_3)}{P(E|R_1).P(R_1)+P(E|R_2).P(R_2)+P(E|R_3).P(R_3)}=\frac{1}{\alpha+2}$$

مثال : فرض کنید 60 درصد از دانشجویان یک کلاس تئوری احتمالات برای بار اول ، 30 درصد برای بار دوم و 10 درصد برای بار سوم درس را اخذ نموده اند . همچنین بر اساس سوابق میدانیم که 80 درصد از دانشجویانی که اولین بار درس را اخذ نموده اند ، نمره قبولی می آورند و این رقم برای دانشجویان بار دوم و سوم به ترتیب برابر 60 درصد و 40 درصد است . اگر دانشجویی در درس نمره قبولی آورده باشد ، احتمال اینکه وی اولین مرتبه درس را اخذ نموده باشد چقدر است ؟

B_i : پیشامد اینکه دانشجو بار i ام درس را اخذ کرده باشد $i=1,2,3$

A : پیشامد اینکه دانشجو نمره قبولی آورده باشد

$$P(B_1)=0.60 \qquad P(B_2)=0.30 \qquad P(B_3)=0.10$$

$$P(A|B_1)=0.80 \qquad P(A|B_2)=0.60 \qquad P(A|B_3)=0.40$$

$$P\left(B_1|A\right)=\frac{P(B_1).P(A|B_1)}{P(B_1).P(A|B_1)+P(B_2).P(A|B_2)+P(B_3).P(A|B_3)}=\frac{48}{70}$$

فصل دوم

متغیرهای تصادفی و توابع احتمال

1- متغیرهای تصادفی

در بیشتر کاربردهای نظریه احتمال ترجیح میدهیم صرفاً به جای مطالعه نتایج آزمایش ، به مطالعه تابعی از نتایج آزمایش بپردازیم . برای مثال در پرتاب یک جفت تاس غالباً مجموع نتایج حاصل از پرتاب دو تاس بیشتر مورد نظر است تا اعداد حاصل شده برای هر یک از تاسها . یعنی ممکن است جالب تر باشد که بدانیم جمع دو تاس برابر 9 است تا اینکه بدانیم نتایج حاصل (3,6) ، (6,3) ، (4,5) ، (5,4) است . همچنین در پرتاب چند سکه ممکن است تعداد شیرهای ظاهر شده جالب تر باشد از نتیجه ای که دنباله ای از شیر و خط را نشان دهد . این کیفیت های مورد نظر یا بطور دقیق تر این توابع حقیقی را که روی فضای نمونه آزمایش تعریف میشوند ، متغیرهای تصادفی می گویند .

تعریف : اگر S یک فضای نمونه و X یک تابع با مقادیر حقیقی باشد که روی عناصر S تعریف شده است ، آنگاه X متغیر تصادفی نامیده می شود .

برای روشن شدن مطلب ، فضای نمونه را برای آزمایش پرتاپ یک جفت تاس همگن را در نظر بگیرید . بنابراین هر یک از 36 نتیجه ممکن دارای احتمال $\frac{1}{36}$ است . متغیر تصادفی X را بعنوان مجموع اعداد حاصل از پرتاب دو تاس در نظر بگیرید . در مثال فوق به متغیر تصادفی X در زیر مجموعه $\{(6,3),(5,4),(4,5),(3,6)\}$ از فضای نمونه S مقدار 9 نسبت داده می شود و می نویسیم X=9 . بنابراین X=9 به عنوان مجموعه ای از عناصر S تعبیر میشود که مجموع آنها 9 است . در حالت کلی تر X=x به عنوان مجموعه ای از عناصر فضای نمونه تعبیر میشود که برای آنها متغیر تصادفی X مقدار x را اختیار میکند .

از آنجایی که مقدار متغیر تصادفی بوسیله نتیجه حاصل از آزمایش محاسبه می گردد ، میتوانیم به مقادیر ممکن یک متغیر تصادفی احتمالهایی را نسبت دهیم .

مثال : یک سکه همگن سه بار پرتاپ میشود . عناصر فضای نمونه را که بنا به فرض هم شانس هستند و مقادیر متناظر X را که تعداد کل شیرهاست نشان دهید .

x	احتمال	عناصر فضای نمونه
3	$\frac{1}{8}$	HHH
2	$\frac{1}{8}$	HHT
2	$\frac{1}{8}$	HTH
2	$\frac{1}{8}$	THH
1	$\frac{1}{8}$	HTT
1	$\frac{1}{8}$	THT
1	$\frac{1}{8}$	TTH
0	$\frac{1}{8}$	TTT

مثلاً برای محاسبه احتمال این پیشامد که تعداد کل شیرها برابر 2 باشد یا به عبارت دیگر متغیر تصادفی X مقدار 2 را اختیارکند ، میتوانیم بنویسیم : $P(X=2)=\frac{3}{8}$.

تعریف : متغیر تصادفی X گسسته است ، اگر برد آن مجموعه ای شمارش پذیر از اعداد حقیقی را تشکیل دهد . متغیر تصادفی X پیوسته است ، اگر برد آن متشکل از مجموعه ای پیوسته (شمارش ناپذیر) از اعداد حقیقی باشد و احتمال برابر بودن X با هر مقدار منفرد از مجموعه برد ، برابر صفر باشد .

مثال : در پرتاب یک جفت تاس فرض کنید X مجموع دو عددی باشد که رخ می دهند . فضای نمونه عبارت است از :

$$S = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 1, 2, \ldots, 6; x_2 = 1, 2, \ldots, 6\}$$

$$X(w) = x_1 + x_2 \qquad ; \qquad w = (x_1, x_2) \in s$$

برد X مجموعه $\{2,3,\ldots,12\}$ است . بنابراین X یک متغیر تصادفی گسسته است .

مثال : فرض کنید لحظه ای که شما محل سکونت خود را به قصد کار روزانه ترک می کنید در هر لحظه بین 7:30 تا 8:00 صبح باشد . فرض کنید Y مدت زمان قبل از 8:00 صبح باشد که در آن شما محل سکونت خود را ترک میکنید . اگر در مقیاس زمانی خود 7:30 را صفر بنامیم ، متغیر تصادفی Y در نمایش تابعی بصورت زیر نوشته می شود :

$$Y(t) = 30 - t; \qquad t \in S$$

در این صورت برد Y مجموعه پیوسته $\{y \mid 0 \le y \le 30\}$ است . پس Y یک متغیر تصادفی پیوسته است.

1-1- متغیرهای تصادفی گسسته

برای بدست آوردن احتمالهای وابسته به مقادیر یک متغیر تصادفی گسسته ، تابع احتمال (توزیع احتمال) را بصورت زیر تعریف می کنیم .

تعریف : اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد ، تابعی که برای هر مقدار x در برد X با $f(x)=P(X=x)$ نشان داده میشود ، تابع احتمال یا توزیع احتمال X نامیده میشود .

با توجه به اصول موضوع احتمال ، قضیه زیر را میتوان بیان نمود .

قضیه : تابعی را میتوان وقتی و فقط وقتی به عنوان تابع احتمال یک متغیر تصادفی گسسته X بکار برد که مقادیر $f(x)$ در شرایط زیر صدق کند :

- به ازای هر مقدار x در برد X داشته باشیم : $f(x) \geq 0$.

  (به ازای سایر مقادیر x داریم : $f(x) = 0$)

- $\sum_{x} f(x) = 1$ ، که در آن حاصل جمع روی تمام مقادیر برد X محاسبه میگردد .

مثال : فرمولی برای تابع احتمال تعداد کل شیرهایی که در سه بار پرتاب یک سکه همگن بدست می آیند پیدا کنید .

$$f(0) = P(X=0) = \frac{1}{8} \qquad f(1) = P(X=1) = \frac{3}{8}$$

$$f(2) = P(X=2) = \frac{3}{8} \qquad f(3) = P(X=3) = \frac{1}{8}$$

صورتهای این چهار کسر یعنی 1، 3، 3 و 1 ضرایب دو جمله ای $\binom{3}{0}$، $\binom{3}{1}$، $\binom{3}{2}$ و $\binom{3}{3}$ هستند . با کمی دقت متوجه می شویم که میتوان برای تابع احتمال ، فرمولی به صورت زیر نوشت :

$$f(x) = \frac{\binom{3}{x}}{8}; \qquad x = 0,1,2,3$$

ملاحظه می گردد که این تابع شرایط توزیع احتمال را دارا است .

$$\forall x \mid x = 0,1,2,3 \quad : f(x) \geq 0$$

$$\sum_{x} f(x) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

در مسائل زیادی ممکن است بخواهیم احتمال اینکه متغیر تصادفی مقداری کوچکتر یا مساوی یک مقدار حقیقی داشته باشد ، را بدست آوریم . لذا احتمال اینکه مقدار X کوچکتر یا مساوی x باشد بصورت $F(x)=P(X\leq x)$ نوشته می شود ، و به این تابع که برای تمام اعداد حقیقی X تعریف شده است ، تابع توزیع یا توزیع تجمعی متغیر تصادفی X می گوییم .

تعریف : اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد ، تابعی که بصورت زیر نشان داده میشود ، تابع توزیع (توزیع جمعی) X خوانده میشود :

$$F(x)=P(X\leq x)=\sum_{t\leq x} f(t) \qquad , \qquad -\infty<x<+\infty$$

بگونه ای که درآن $f(t)$ مقدار تابع احتمال X به ازای t است .

با توجه به اصول موضوعه احتمال قضیه زیر را می توان نتیجه گرفت :

قضیه : مقادیر $F(x)$ ، تابع توزیع متغیر تصادفی گسسته X ، در شرایط زیر صدق می کند :

- $F(-\infty)=0$
- $F(+\infty)=1$
- به ازای هر دو عدد حقیقی a و b ، اگر $a<b$ آنگاه : $F(a)\leq F(b)$.

اگر تابع احتمال گسسته مفروضی را داشته باشیم ، غالباً پیدا کردن تابع توزیع کار ساده ای است .

مثال : تابع توزیع تعداد کل شیرهایی که در سه بار پرتاب یک سکه همگن بدست می آیند را بنویسید .

$$F(0)=f(0)=\frac{1}{8}$$

$$F(1)=f(0)+f(1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$$

$$F(2)=f(0)+f(1)+f(2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$$

$$F(3)=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=1$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \ x<0\\ \frac{1}{8} & , \ 0\le x<1\\ \frac{4}{8} & , \ 2\le x<2\\ \frac{7}{8} & , \ 2\le x<3\\ 1 & , \ x\ge 3\end{cases}$$

تابع توزیع $F(x)$ را می توان برای محاسبه هر نوع گزاره احتمال درباره متغیر تصادفی X بکار برد .

به عنوان مثال برای هر $a<b$ داریم :

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

اثبات :

$$A: X\le a \qquad B: a<X\le b$$

$$A\bigcup B: X\le b \qquad A\bigcap B=\phi \qquad P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$$

$$P(X\le b)=P(X\le a)+P(a<X\le b)\Rightarrow P(a<X\le b)=P(X\le b)-P(X\le a)$$

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

همچنین میتوان مقادیر تابع احتمال را از روی تابع توزیع بدست آورد . برای این منظور قضیه زیر بکار گرفته میشود .

قضیه : اگر برد متغیر تصادفی X ، متشکل از مقادیر $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n$ باشد، آنگاه خواهیم داشت :

$$f(x_1)=F(x_1) \ , \quad f(x_i)=F(x_i)-F(x_{i-1}) \ ; \ i=2,3,\ldots,n$$

در واقع قضیه فوق بدین معنی است که اگر X یک متغیر تصادفی گسسته باشد و مقادیر ممکن آن برابر با x_1، x_2، x_3، ... ، x_n باشد ، بطوریکه $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$، آنگاه تابع توزیع تجمعی F(x) یک تابع پله ای است . یعنی تابع F در فاصله (x_{i-1}, x_i) ثابت است و جهشی به اندازه $f(x_i)$ در نقطه x_i دارد .

بعنوان نمونه ، در مثال قبل تابع احتمال را از روی تابع توزیع بدست آورید .

$$f(0) = F(0) = \frac{1}{8}$$

$$f(1) = F(1) - F(0) = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(2) = F(2) - F(1) = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(3) = F(3) - F(2) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

2-1- متغیرهای تصادفی پیوسته

متغیرهای تصادفی که مقادیر ممکن آنها غیر قابل شمارش است ، متغیر تصادفی پیوسته نامیده میشوند . بعنوان مثال زمان ورود یک قطار به ایستگاه یا طول عمر یک لامپ دونمونه ازمتغیرهای تصادفی پیوسته میباشند .

برای تعریف احتمال در حالت پیوسته ، تعریف تابعی به نام تابع چگالی احتمال لازم میباشد . بگونه ای که سطح زیر منحنی این تابع در یک بازه مشخص ، احتمال مربوط به این بازه را مشخص میکند . به عبارت دیگر انتگرال یک تابع چگالی از a تا b $(a \le b)$ احتمال این را که متغیر تصادفی مربوطه ، مقداری را در بازه a تا b اختیار کند بدست میدهد .

تعریف : تابع $f(x)$ را که روی مجموعه تمام اعداد حقیقی تعریف شده است ، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی پیوسته X میگویند ، اگرو فقط اگر به ازای هردو مقدار حقیقی ثابت a و b $(a \le b)$ داشته باشیم :

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$

با انتخاب $a=b$ خواهیم داشت : $P(X=a) = \int_a^a f(x)dx = 0$.

یعنی احتمال اینکه یک متغیر تصادفی پیوسته یک مقدار مشخص ثابتی را اختیار کند برابر صفر است .

با توجه به اصول موضوع احتمال ، قضیه زیر را میتوان مطرح نمود .

قضیه : تابعی را میتوان به عنوان تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته X بکار برد ، اگر مقادیر آن یعنی $f(x)$ در شرایط زیر صدق کند :

- $f(x) \ge 0$ به ازای $-\infty < x < +\infty$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

قضیه : اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته و a و b دو عدد حقیقی ثابت با شرط $a \le b$ باشند ، آنگاه :

$$P(a \le X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b)$$

مثال : تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X بصورت $f(x) = \begin{cases} ke^{-3x}; & x \ge 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$ داده شده است .

مقدار k و $P(0.5 \le X \le 1)$ را بدست آورید .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} ke^{-3x}dx = k.\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-3x}}{-3}\Big|_0^t = \frac{k}{3} = 1 \Rightarrow k = 3$$

$$P(0.5 \le X \le 1) = \int_{0.5}^{1} 3e^{-3x}dx = -e^{-3x}\Big|_{0.5}^{1} = -e^{-3} + e^{-1.5} = 0.173$$

در حالت پیوسته نیز همانند حالت گسسته مسائل زیادی وجود دارند که در آنها علاقمندیم ، احتمال اینکه متغیر تصادفی مقداری کوچکتر یا مساوی یک مقدار حقیقی داشته باشد ، را بدست آوریم . لذا تعریف زیر را ارائه می دهیم .

تعریف : اگر X متغیر تصادفی پیوسته ای باشد ، تابعی که بصورت

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \qquad , \qquad -\infty < x < \infty$$

داده می شود و در آن $f(t)$ تابع چگالی احتمال X به ازای t است ، تابع توزیع یا توزیع تجمعی X نامیده میشود .

ویژگیهای توابع توزیع که در حالت گسسته عنوان شد ، برای حالت پیوسته نیز برقرارند یعنی :

$$F(-\infty) = 0 \qquad F(+\infty) = 1 \qquad a < b \Rightarrow F(a) \le F(b)$$

قضیه : اگر $f(x)$ و $F(x)$ به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع X به ازای x باشند ، آنگاه به ازای هر دو مقدار حقیقی و ثابت a و b با شرط $a \le b$ خواهیم داشت :

- $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$
- $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$

مثال : تابع توزیع مثال قبل را پیدا کنید . از این تابع توزیع برای محاسبه مجدد $P(0.5 \le X \le 1)$ استفاده کنید .

حل:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} 3e^{-3t}dt = -e^{-3t}\Big|_{0}^{x} = 1 - e^{-3x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 - e^{-3x}, & \quad x \ge 0 \end{cases}$$

$$P(0.5 \le X \le 1) = F(1) - F(0.5) = (1 - e^{-3}) - (1 - e^{-1.5}) = -e^{-3} + e^{-1.5} = 0.173$$

مثال : فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی زیر باشد :

$$f(x)=\begin{cases} c(4x-2x^2), & 0<x<2 \\ 0, & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) مقدار c چیست؟ ب) $P(X>1)$ را پیدا کنید .

الف)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^2 c(4x-2x^2)dx=c\left[2x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=1 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{3}{8}$$

ب)

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)=1-\int_{-\infty}^{1} f(x)dx=\int_1^{\infty} f(x)dx=\frac{3}{8}\int_1^2(4x-2x^2)dx=\frac{1}{2}$$

مثال : مدت زمان کارکرد یک کامپیوتر (برحسب ساعت) قبل از خرابی یک متغیر تصادفی پیوسته X با تابع چگالی احتمال زیر است :

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-x/100} & x\ge 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

احتمال اینکه کامپیوتر قبل از خرابی بین 50 و 150 ساعت کار کند ، چقدر است؟

حل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\infty}\lambda e^{-x/100}dx=1 \quad \Rightarrow \quad (-100\lambda)(e^{-x/100})\Big|_0^{\infty}=1$$

$$100\lambda=1 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\frac{1}{100}$$

$$P(50<X<150)=\int_{50}^{150}\frac{1}{100}e^{-x/100}dx=-e^{-x/100}\Big/_{50}^{150}=e^{-1/2}-e^{-3/2}\approx 0.384$$

2- امید ریاضی

مفهوم امید ریاضی در اصل در ارتباط با بازیهای شانسی بوجود آمده است و در ساده‌ترین حالت ، حاصلضرب مبلغی است که بازیکن امکان برد آن را دارد در احتمال آنکه برنده شود . به عنوان نمونه اگر جایزه یک بخت آزمایی 500,000 تومان باشد و ما یکی از 10,000 بلیط را داشته باشیم ، امید ریاضی برد ما برابر $1/10000 \times 500,000 = 50$ است. این رقم به مفهوم یک متوسط تعبیر می‌شود. بدین معنا که مقدار جایزه 10,000 بلیط جمعاً 500,000 تومان یا به طور متوسط مقدار جایزه هر بلیط برابر $1/10000 \times 500,000$ تومان است .

2-1- امید ریاضی متغیرهای تصادفی گسسته

تعریف : اگر X یک متغیر تصادفی گسسته و f(x) مقدار تابع احتمال آن به ازای x باشد ، آنگاه امید ریاضی یا مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی برابر است با :

$$E(X) = \sum_{x:f(x)>0} x.f(x)$$

به عبارتی امید ریاضی X یک میانگین وزنی از مقادیری است که x می‌تواند اختیار کند ، و وزن هر مقدار احتمالی است که X می‌تواند آن را اختیار کند .

امید ریاضی یک متغیر تصادفی X یعنی E(X) را میانگین X می‌نامند . میانگین X را با μ نیز نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال اگر تابع احتمال X بصورت زیر باشد :

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad f(1) = \frac{1}{2}$$

آنگاه خواهیم داشت : $E(X) = 0.\frac{1}{2} + 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

که همان متوسط معمولی و یا میانگین وزنی دو مقدار 0 و 1 است که X می‌تواند انتخاب کند .

مثال : مقدار $E(X)$ را در پرتاب یک تاس منظم بدست آورید .

$$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=f(6)=\frac{1}{6}$$

$$E(X)=1(\frac{1}{6})+2(\frac{1}{6})+3(\frac{1}{6})+4(\frac{1}{6})+5(\frac{1}{6})+6(\frac{1}{6})=\frac{7}{2}$$

در بسیاری از مسائل، نه تنها مقدار مورد انتظار یک متغیر تصادفی X ، بلکه مقادیر مورد انتظار متغیرهای تصادفی وابسته به X نیز مورد توجه هستند. مثلاً ممکن است بخواهیم امید ریاضی تابعی از X مانند $g(X)$ را محاسبه کنیم .

قضیه: اگر X متغیر تصادفی گسسته و $f(x)$ مقدار تابع احتمال آن به ازای x باشد، امید ریاضی یا مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $g(X)$ برابر است با :

$$E[g(X)]=\sum_{x} g(x).f(x) \qquad (g \text{ تابع حقیقی دلخواه})$$

مثال : اگر متغیر تصادفی X عددی باشدکه در پرتاب یک تاس همگن ظاهر می‌شود ، مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $g(X)=2X^2+1$ را پیدا کنید .

$$E[g(X)]=\sum_{x=1}^{6} (2x^2+1).\frac{1}{6}=(2\times 1^2+1).\frac{1}{6}+\ldots+(2\times 6^2+1).\frac{1}{6}=\frac{94}{3}$$

2-2- امید ریاضی متغیرهای تصادفی پیوسته

تعریف : اگر X متغیر تصادفی پیوسته و $f(x)$ تابع چگالی احتمال آن به ازای x باشد ، امید ریاضی یا مقدار مورد انتظار این متغیر تصادفی برابر است با :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$$

مثال : مطلوبست محاسبه $E(X)$ وقتی که تابع چگالی X برابر است با :

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

حل :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

قضیه : اگر X متغیر تصادفی پیوسته و $f(x)$ مقدار چگالی آن به ازای x باشد ، امید ریاضی یا مقدار مورد انتظار متغیر تصادفی $g(X)$ برابر است با :

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x).f(x)dx \qquad (\text{g تابع حقیقی دلخواه})$$

3-2- خواص امید ریاضی

قضیه : اگر a و b مقادیر ثابتی باشند ، آنگاه : $E(aX+b)=aE(X)+b$.

نتیجه 1 : اگر a مقداری ثابت باشد آنگاه : $E(aX)=a.E(X)$.

نتیجه 2 : اگر b مقداری ثابت باشد ، آنگاه : $E(b)=b$.

قضیه: اگر C_1 , C_2 , … , C_n مقادیری ثابت باشند، آنگاه :

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(X)\right]=\sum_{i=1}^{n} c_i E[g_i(X)]$$

3- واریانس متغیرهای تصادفی

اگر X یک متغیر تصادفی باشد ، $E(X)$ مقدار مورد انتظار این متغیر تصادفی را می‌دهد ، اما نمی‌تواند هیچ اطلاعی در مورد تغییرات یا پراکندگی مقادیر X ارائه دهد .

انتظار داریم که مقدار X حول میانگینش یعنی $E(X)$ باشد. ولیکن برای در نظر گرفتن اندازه تغییرات میتوان متوسط اختلاف X از میانگینش را محاسبه نمود که البته باید قدرمطلق این میزان اختلاف را در نظر گرفت . یعنی باید $E(|X-\mu|)$ محاسبه گردد که در آن $\mu = E(X)$ میباشد .

این اندازه از نظر ریاضی چندان مناسب نیست و بنابراین معیاری که معمولاً در نظر گرفته می‌شود ، امید ریاضی مربع اختلاف بین X و $E(X)$ است یعنی: $E[(X-\mu)^2]$.

تعریف : گر X یک متغیر تصادفی (گسسته ، پیوسته) با میانگین $\mu = E(X)$ باشد ، آنگاه واریانس X که آن را با $Var(X)$ یا σ_X^2 نشان می‌دهیم بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$$

یک رابطه دیگر برای $Var(X)$ بصورت زیر بدست می‌آید :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

اثبات (در حالت گسسته) :

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2).f(x)$$
$$= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x x f(x) + \mu^2 \sum_x f(x) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$
$$= E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

مثال : اگر X نشان دهنده نتیجه حاصل از پرتاب یک تاس سالم باشد، Var(X) را حساب کنید .

$$E(X)=\frac{7}{2} \qquad E(X^2)=1^2(\frac{1}{6})+2^2(\frac{1}{6})+3^2(\frac{1}{6})+\ldots+6^2(\frac{1}{6})=\frac{91}{6}$$

$$Var(X)=\frac{91}{6}-(\frac{7}{2})^2=\frac{35}{12}$$

مثال : مطلوبست محاسبه Var(X) وقتی که تابع چگالی X برابر است با :

$$f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{2}{3} \qquad E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 2x^3dx=\left[\frac{x^4}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$Var(X)=\frac{1}{2}-(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

قضیه : برای هر مقدار ثابت a و b داریم :

$$Var(aX+b)=a^2Var(X)$$

اثبات :

$$Var(aX+b)=E[\left((aX+b)-E(aX+b)\right)^2]=E[(aX+b-a\mu-b)^2]$$

$$=E[(aX-a\mu)^2]=E[a^2(X-\mu)^2]=a^2E[(X-\mu)^2]=a^2Var(X)$$

جذر $Var(X)$ را انحراف معیار X نامیده و با علامت σ_X نشان می‌دهند .

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{Var(X)}$$

در واقع انحراف معیار ، میزان پراکندگی توزیع متغیر تصادفی را نشان میدهد .

برای درک بهتر مثال زیر را در نظر بگیرید .

مثال : متغیرهای تصادفی X و Y را با تابع احتمال $f(x)$ و $f(y)$ به صورت زیر در نظر بگیرید .

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad ; \quad x = 1-,0,+1 \qquad\qquad f(y) = \frac{1}{3} \quad ; \quad y = -2,0,+2$$

$$E(X) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \qquad\qquad E(Y) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{3} \qquad\qquad Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{8}{3}$$

بنابراین متوسط مربع انحراف X از مقدار میانگینش برابر $\frac{2}{3}$ و متوسط مربع انحراف Y از مقدار میانگینش برابر $\frac{8}{3}$ است . ولیکن داریم :

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad\qquad \sigma_Y = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

بنابراین میزان پراکندگی توزیع متغیر تصادفی Y دو برابر پراکندگی توزیع متغیر تصادفی X میباشد .

فصل سوم

متغیرهای تصادفی گسسته خاص

در این فصل برخی توزیع های احتمال در مورد متغیرهای تصادفی گسسته خاص که دارای کاربردهای مهمی می باشند ، مورد مطالعه قرار خواهند گرفت .

1- توزیع یکنواخت گسسته

اگر یک متغیر تصادفی بتواند k مقدار مختلف را با احتمالهای برابر اختیار کند ، می گوییم که دارای توزیع یکنواخت گسسته[1] است .

تعریف : متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت گسسته است و به آن متغیر تصادفی یکنواخت گسسته گفته میشود ، اگر و فقط اگر توزیع احتمال آن برای $x_i \neq x_j$ وقتی $i \neq j$ ، به صورت زیر باشد :

$$f(x) = \frac{1}{k}, \qquad x = x_1, x_2, \ldots, x_k$$

میانگین و واریانس این توزیع به صورت زیر محاسبه می شود :

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i . \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 . \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2$$

[1] Discrete Uniform Distribution

2- توزیع برنولی

اگر آزمایشی دو نتیجه به صورت پیروزی و شکست داشته باشد و احتمال آنها به ترتیب θ و $1-\theta$ باشند ، به آن آزمایش برنولی گفته میشود . حال چنانچه متغیر تصادفی X را به عنوان تعداد پیروزی در یک آزمایش برنولی تعریف نماییم ، به آن متغیر تصادفی برنولی گفته میشود . وقتی پیروزی حاصل میشود ، متغیر تصادفی X برابر یک و وقتی شکست حاصل میگردد آن را برابر صفر قرار می دهیم .

برای بدست آوردن توزیع احتمال برای یک متغیر تصادفی برنولی بصورت زیر عمل می کنیم :

$$f(0)=f(0;\theta)=1-\theta \qquad f(1)=f(1;\theta)=\theta$$

$$f(x;\theta)=\theta^{x}(1-\theta)^{1-x}, \qquad x=0,1$$

پس $f(0;\theta)=1-\theta$ و $f(1;\theta)=\theta$ در یک فرمول واحد ترکیب شده اند. ملاحظه کنید که نماد $f(x;\theta)$ را به کار برده ایم تا نشان دهیم که توزیع برنولی دارای یک پارامتر θ است .

تعریف : متغیر تصادفی X توزیع برنولی دارد و به آن متغیر تصادفی برنولی گفته میشود ، اگر و فقط اگر توزیع احتمال آن به صورت زیر باشد :

$$f(x;\theta)=\theta^{x}(1-\theta)^{1-x}, \qquad x=0,1$$

3- توزیع دو جمله ای

آزمایشی که توزیع برنولی برای آن بکار میرود را آزمایش برنولی یا بطور خلاصه آزمایش ساده نامیده میشود . دنباله هایی از آزمایش های برنولی نقش بسیار مهمی را در احتمال و آمار به عهده دارند . خصوصاً وقتی که تعداد آزمایشها ثابت ، پارامتر احتمال پیروزی (θ) برای تمام آزمایشها یکسان و آزمایشها همگی مستقل باشند . به عنوان نمونه اگر بخواهیم احتمال بدست آوردن 5 شیر در 12 پرتاب یک سکه و یا احتمال بهبود 7 نفر از 10 نفر مبتلا به یک بیماری خاص را بدست آوریم ، این نظریه بکار میرود .

بنابراین اگر n آزمایش ساده مستقل که هر کدام با احتمال θ به نتیجه پیروزی و با احتمال $1-\theta$ به شکست منجر میشوند را انجام داده و متغیر تصادفی X بعنوان تعداد پیروزیها در این n آزمایش در نظر گرفته شود ، آنگاه X را یک متغیر تصادفی دو جمله ای[1] با پارامترهای (n,θ) می گویند .

حال می خواهیم فرمولی برای بدست آوردن احتمال x پیروزی در n آزمایش را پیدا کنیم . بعبارت دیگر ، میخواهیم توزیع احتمال متغیر تصادفی X را بدست آوریم .

ملاحظه کنید که احتمال بدست آوردن x پیروزی و n-x شکست در یک ترتیب خاص برابر $\theta^x(1-\theta)^{n-x}$ است . زیرا احتمال هر پیروزی برابر θ و احتمال هر شکست برابر $(1-\theta)$ است و بنابر فرض استقلال آزمایشها ، احتمال x پیروزی و n-x شکست برابر است با : $\theta^x(1-\theta)^{n-x}$.

از طرف دیگر تعداد راههایی که میتوانیم x آزمایش را که نتیجه همه آنها پیروزی است از بین n آزمایش انتخاب کنیم برابر است با : $\binom{n}{x}$. به صورت ساده تر می توان گفت که جمعاً $\binom{n}{x}$ حالت متفاوت برای اینکه نتیجه x آزمایش ساده پیروزی باشد وجود دارد .

بنابراین احتمال بدست آوردن x پیروزی در n آزمایش ساده مستقل برابر $\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$ است .

---
[1] Binomial Distribution

بعنوان مثال ، اگر x=2 و n=4 باشد ، آنگاه به تعداد $6=\binom{4}{2}$ طریق مختلف نتیجه 4 آزمایش ساده میتواند به صورت 2 پیروزی حاصل گردد . این نتایج را میتوان به صورت زیر نشان داد :

$$(0,0,1,1),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(1,0,1,0),(1,1,0,0),(0,1,1,0)$$

هرگاه مثلاً $(1,1,0,0)$ بدین معنی باشد که در دو آزمایش ساده اول پیروزی و در دو آزمایش بعدی شکست حاصل شود . از آنجایی که هر یک از این نتایج دارای احتمال $\theta^2(1-\theta)^{4-2}$ است ، بنابراین احتمال اینکه 2 پیروزی در 4 مرتبه تکرار آزمایش ساده حاصل گردد ، برابر است با : $\binom{4}{2}\theta^2(1-\theta)^2$.

تعریف : متغیر تصادفی X توزیع دوجمله ای دارد و به آن متغیر تصادفی دو جمله ای گفته میشود ، اگر و فقط اگر توزیع احتمال آن به صورت زیر باشد :

$$b(x;n,\theta)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}, \qquad x=0,1,2,\ldots,n$$

مثال : احتمال بدست آوردن 5 شیر و 7 خط را در 12 پرتاب یک سکه همگن پیدا کنید .

$$\theta=\frac{1}{2} \qquad n=12 \qquad x=5$$

$$b(5;12,\frac{1}{2})=\binom{12}{5}(\frac{1}{2})^5(1-\frac{1}{2})^{12-5}=792(\frac{1}{2})^{12}\approx 0.19$$

مثال : میدانیم که پیچ های تولید شده توسط یک شرکت تولیدی با احتمال 0.01 مستقل از یکدیگر خراب میباشند . شرکت پیچ ها را در بسته های 10 تایی بسته بندی میکند. این شرکت معتقد است که حداکثر یک پیچ خراب در هر بسته وجود دارد و چنانچه غیر از این باشد بسته پیچ را از مشتری تحویل گرفته و پول وی را پس میدهد . چه نسبتی از بسته های فروخته شده ، بازگشت داده می شوند ؟

X : تعداد پیچ های خراب داخل هرجعبه $X \sim b(x;10,0.01)$

$$P(X=0)=b(0;10,0.01)=\binom{10}{0}(0.01)^0(0.99)^{10}$$

$$P(X=1)=b(1;10,0.01)=\binom{10}{1}(0.01)^1(0.99)^9$$

احتمال بازگشت یک جعبه $=1-[P(X=0)+P(X=1)]=0.004$

بنابراین فقط 0.4 درصد از جعبه ها برگشت داده می شوند .

در استفاده از فرمول توزیع دوجمله ای ، متوجه میشویم که انجام محاسبات آن معمولاً کار زیادی خواهد برد. در عمل احتمالهای دوجمله ای کمتر بطور مستقیم محاسبه میشوند. جهت بدست آوردن این احتمالها برای مقادیر مختلف θ و n جداولی تهیه شده است . در بسیاری از این جداول مقادیر $b(x;n,\theta)$ برای $n=1$ تا $n=20$ و $\theta=0.05,0.10,0.15,\ldots,0.45,0.50$ داده شده اند .

در استفاده از این جداول وقتی θ بزرگتر از 0.50 است ، قضیه زیر را بکار می بریم .

قضیه : $b(x;n,\theta)=b(n-x;n,1-\theta)$..

به عنوان مثال برای تعیین $b(11;18,0.70)$ مقدار $b(7;18,0.30)$ را بکار می بریم.

وقتی n بزرگ است نیز چندین راه مختلف وجود دارد که توسط آنها میتوان احتمالهای دوجمله ای را تقریب زد .

قضیه : میانگین و واریانس توزیع دو جمله ای برابرند با :

$$\mu = n\theta \qquad \sigma^2 = n\theta(1-\theta)$$

اثبات :

$$\mu = \sum_{x=0}^{n} x.\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x.\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-X}$$

$$= \sum_{x=1}^{n}\frac{n!}{(x-1)!(n-x)!}\theta^x(1-\theta)^{n-x} = n\theta\sum_{x=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x}$$

$$= n\theta\sum_{x=1}^{n}\binom{n-1}{x-1}\theta^{x-1}(1-\theta)^{n-x} \qquad y = x-1, m = n-1$$

$$\mu = n\theta\sum_{y=0}^{n-1}\binom{n-1}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-1-y} = n\theta\sum_{y=0}^{m}\binom{m}{y}\theta^y(1-\theta)^{m-y}$$

$$\sum_{y=0}^{m}\binom{m}{y}\theta^y(1-\theta)^{m-y} = \sum_{y=0}^{m} b(y;m,\theta) = 1$$

$$\mu = n\theta$$

$$E(X^2)=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} = \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\frac{n!}{x!(n-x)!}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{n}\frac{n!}{(x-2)!(n-x)!}\theta^x(1-\theta)^{n-x} = n(n-1)\theta^2\sum_{x=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}\theta^{x-2}(1-\theta)^{n-x}$$

$$= n(n-1)\theta^2\sum_{x=2}^{n}\binom{n-2}{x-2}\theta^{x-2}(1-\theta)^{n-x} \qquad y = x-2, m = n-2$$

$$E[X(X-1)] = n(n-1)\theta^2\sum_{y=0}^{n-2}\binom{n-2}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-2-y} = n(n-1)\theta^2\sum_{y=0}^{m} = \binom{m}{y}\theta^y(1-\theta)^{m-y}$$

$$E[X(X-1)] = n(n-1)\theta^2 \quad E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X) = n(n-1)\theta^2 + n\theta$$

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = n(n-1)\theta^2 + n\theta + n^2\theta^2 = n\theta - n\theta^2 = n\theta(1-\theta)$$

$$\sigma_x^2 = n\theta(1-\theta)$$

4- توزیع دو جمله ای منفی

فرض کنید آزمایشهای ساده مستقل هر کدام با احتمال پیروزی θ را آنقدر تکرارکنیم تا k امین پیروزی حاصل شود . اگر X نشان دهنده تعداد آزمایشهای ساده لازم برای رسیدن به k امین پیروزی باشد ، به آن متغیر تصادفی دوجمله ای منفی[1] می گویند . می خواهیم توزیع احتمال این متغیر تصادفی را بدست آوریم . اگر k امین پیروزی در x امین آزمایش رخ بدهد ، باید $k-1$ پیروزی در $x-1$ آزمایش اول رخ داده باشد . لذا احتمال اینکه k امین پیروزی در x امین آزمایش رخ بدهد عبارت است از :

احتمال اینکه $k-1$ پیروزی در $x-1$ آزمایش اول رخ داده باشد و نتیجه x امین آزمایش نیز پیروزی باشد . بنابراین ، با توجه به اینکه آزمایشها همگی مستقل هستند لذا ، احتمال اینکه k امین پیروزی در x امین آزمایش رخ بدهد برابر است با :

$$\theta . b(k-1; x-1, \theta) = \binom{x-1}{k-1} \theta^k (1-\theta)^{x-k}$$

تعریف : متغیر تصادفی X توزیع دوجمله ای منفی دارد و به آن متغیر تصادفی دوجمله ای منفی گفته میشود ، اگر و فقط اگر توزیع احتمال آن به ازای $x = k, k+1, k+2, \ldots$ به صورت زیر باشد :

$$b^*(x; k, \theta) = \binom{x-1}{k-1} \theta^k (1-\theta)^{x-k}$$

مثال : یک تاس منظم را بطور پی در پی پرتاب می کنیم تا دوبار عدد شش مشاهده شود . احتمال مشاهده دقیقاً 10 بار عدد غیر شش پیش از مشاهده عدد شش دوم را بدست آورید . یعنی در واقع باید احتمال اینکه دومین شش در دوازدهمین پرتاب مشاهده شود را بدست آوریم .

$$k = 2 \quad \theta = \frac{1}{6} \quad x = 12$$

$$b^*(12; 2, \frac{1}{6}) = \binom{12-1}{2-1} (\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6})^{10} = \binom{11}{1} (\frac{1}{6})^2 (\frac{5}{6})^{10} = 0.049$$

[1] Negative Binomial Distribution

مثال : اگر فردی که در معرض ابتلا به یک بیماری مسری قرار دارد با احتمال 0.40 به آن دچار شود .

احتمال اینکه دهیمن نفر در معرض بیماری ، سومین فردی باشد که به آن دچار می شود چقدر است؟

$k=3 \qquad \theta=0.40 \qquad x=10$

$$b^*(10;3,0.40)=\binom{9}{2}(0.40)^3(0.60)^7=0.0645$$

قضیه : میانگین و واریانس توزیع دوجمله ای منفی بصورت زیر خواهد بود :

$$\mu=\frac{k}{\theta} \qquad \sigma^2=\frac{k}{\theta}\left(\frac{1}{\theta}-1\right)$$

وقتی جدولی از توزیع دوجمله ای در دسترس باشد ، احتمالهای دوجمله ای منفی را میتوان با استفاده از قضیه زیر محاسبه نمود .

قضیه : $b^*(x;k,\theta)=\frac{k}{x}.b(k;x,\theta)$.

5- توزیع هندسی

به توزیع دوجمله ای منفی به ازای k=1 توزیع هندسی[1] میگویند . بنابر این اگر متغیر تصادفی X تعداد تکرار آزمایشهای ساده مستقل برای رسیدن به اولین پیروزی باشد ، X متغیر تصادفی هندسی میباشد .

تعریف : متغیر تصادفی X توزیع هندسی دارد و به آن متغیر تصادفی هندسی گفته می شود ، اگر و فقط اگر توزیع احتمالش به صورت زیر باشد :

$$g(x;\theta)=\theta(1-\theta)^{x-1}\ , \qquad x=1,2,3,\ldots$$

مثال: اگر احتمال اینکه یک متقاضی گواهینامه رانندگی ، در آزمون مربوطه قبول شود 0/75 باشد ، احتمال اینکه یک متقاضی سرانجام در چهارمین آزمون قبول شود چقدر است ؟

$$g(4;0.75)=0.75(1-0.75)^{4-1}\ =0.75(0.25)^3=0.0117$$

قضیه : امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی هندسی بصورت زیر میباشد :

$$\mu=\frac{1}{\theta} \qquad \sigma^2=\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{\theta}-1\right)$$

[1] Geometric Distribution

6- توزیع فوق هندسی

در توزیع دوجمله ای نمونه گیری با جایگذاری است و بنابر این آزمایشها مستقل هستند . حال میخواهیم فرمولی شبیه دوجمله ای بدست آوریم که در آن نمونه گیری بدون جایگذاری باشد و در نتیجه آزمایشها مستقل نخواهند بود .

مجموعه ای از N عنصر را در نظر می گیریم که k تای آنها به عنوان پیروزی و N-k تای دیگر را شکست تلقی می کنیم . مانند حالت دوجمله ای ، احتمال بدست آوردن x پیروزی در n آزمایش مورد توجه است ، اما بدون جایگذاری . n عنصر از N عنصر مجموعه را انتخاب می کنیم . حال میخواهیم تعداد راههای ممکن برای انتخاب x پیروزی و n-x شکست را پیدا کنیم .

برای انتخاب x تا از k تا پیروزی ، $\binom{k}{x}$ طریق وجود دارد .

برای انتخاب n-x تا از N-k تا شکست ، $\binom{N-k}{n-x}$ طریق وجود دارد .

بنابر این برای انتخاب x پیروزی و n-x شکست ، $\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}$ طریق موجود است .

چون برای انتخاب n عنصر از N عنصر جامعه کلاً $\binom{N}{n}$ طریق وجود دارد ، بنابر این احتمال x پیروزی در n آزمایش برابر است با : $\dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$.

تعریف : متغیر تصادفی X دارای توزیع فوق هندسی[1] است و به آن متغیر تصادفی فوق هندسی گفته میشود، اگر و فقط اگر توزیع احتمالش برای $x = 0,1,2,,\ldots,n$ $x \le k,$ $n - x \le N - k,$ بصورت زیر باشد :

$$h(x;n,N,k) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

مثال : از بین 120 نفر متقاضی برای شغلی فقط 80 نفرشان واجد شرایط هستند . اگر 5 نفر از متقاضیان به تصادف و فقط یکبار برای مصاحبه انتخاب شوند ، احتمال اینکه فقط 2 نفر برای شغل مزبور واجد شرایط باشند را بدست آورید .

$x = 2 \quad n = 5 \quad N = 120 \qquad k = 80$

$$h(2;5,120,80) = \frac{\binom{80}{2}\binom{40}{3}}{\binom{120}{5}} = 0.164$$

قضیه : میانگین و واریانس توزیع فوق هندسی بصورت زیر خواهد بود :

$$\mu = \frac{nk}{N} \qquad \sigma^2 = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

[1] Hyper geometric Distribution

6-1- تقریب توزیع فوق هندسی بوسیله توزیع دوجمله‌ای

وقتی N در مقایسه با n بزرگ باشد (بطوریکه $\frac{N-n}{N-1}$ تقریباً برابر 1 باشد) تفاوت چندانی بین نمونه‌گیری با جایگذاری و بدون جایگذاری وجود ندارد ، و برای تقریب احتمالهای فوق هندسی می‌توان فرمول توزیع دوجمله‌ای را با پارامترهای n و $\theta = \frac{k}{N}$ به کار برد .

$\theta = \frac{k}{N}$ نسبت پیروزیها در جامعه $\approx$ احتمال پیروزی

$$\frac{N-n}{N-1} \approx 1$$

$$E(X) = \frac{nk}{N} = n\theta$$

$$Var(X) = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)} \approx \frac{nk(N-k)}{N^2} = \frac{nk}{N} = \frac{N-k}{N} = \frac{nk}{N} \times (1 - \frac{k}{N})$$

$$Var(X) = n\theta(1-\theta)$$

$$\frac{N-n}{N-1} \approx 1 \Rightarrow h(x;n,N,k) \approx b(x;n,k/N)$$

مثال : در مثال قبل ، از توزیع دوجمله‌ای به عنوان یک تقریب استفاده کرده ، و احتمال اینکه فقط 2 نفر از 5 نفر واجد شرایط شغل مزبور باشند را پیدا کنید .

$$n = 5 \quad x = 2 \quad N = 120 \quad k = 80 \quad \frac{N-n}{N-1} = \frac{115}{119} = 0.97 \approx 1$$

$$\theta = \frac{k}{N} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3} \quad b(2;5,\frac{2}{3}) = \binom{5}{2}(\frac{2}{3})^2(1-\frac{2}{3})^3 = 0.165$$

7- توزیع پواسون

توزیع پواسون[1] در زمینه های مختلف کاربرد زیادی دارد . در ساده ترین حالت ، این توزیع را میتوان به عنوان تقریبی برای توزیع دو جمله ای با پارامترهای (n,θ) وقتی که n بزرگ و θ کوچک بوده و $n\theta$ مقدار ثابتی داشته باشد بکار برد . بنابراین فرض کنید که X یک متغیر تصادفی دو جمله ای با پارامترهای (n,θ) بوده و نیز $\lambda = n\theta$ مقدار ثابتی باشد . آنگاه خواهیم داشت :

$$X \sim b(x;n,\theta) \qquad , \qquad \lambda = n\theta \Rightarrow \theta = \frac{\lambda}{n}$$

$$b(x;n,\theta) = \binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x} = \binom{n}{x}\left(\lambda/n\right)^{x}(1-\lambda/n)^{n-x}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)(n-x)!}{(n-x)!x!}.\frac{\lambda^{x}}{n^{x}}.\frac{(1-\lambda/n)^{n}}{(1-\lambda/n)^{x}} = \frac{n(n-1)\ldots(n-x+1)}{n^{x}}.\frac{\lambda^{x}}{x!}.\frac{(1-\lambda/n)^{n}}{(1-\lambda/n)^{x}}$$

از آنجایی که : $n\theta = \lambda$, $\theta \to 0$, $n \to \infty$ ، لذا خواهیم داشت :

$$\frac{n(n-1)\ldots.(n-x+1)}{n^{x}} \to 1 \qquad , \qquad (1-\frac{\lambda}{n})^{n} \to e^{-\lambda} \qquad , \qquad (1-\frac{\lambda}{n})^{x} \to 1$$

$$b(x;n,\lambda/n) \approx \frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!} = p(x;\lambda)$$

بنابراین وقتی $n \to \infty$ و $\theta \to 0$ و $n\theta = \lambda$ ثابت باشد ، تعداد پیروزیها متغیری تصادفی است که توزیع پواسون با پارامتر λ دارد . در این حالت ، پارامتر λ نرخ وقوع (میانگین) تعداد پیروزیها میباشد .

تعریف : متغیر تصادفی X توزیع پواسون دارد و به آن متغیر تصادفی پواسون گفته میشود ، اگر و فقط اگرتوزیع احتمال آن به صورت زیر باشد :

$$p(x;\lambda) = \frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!} \qquad , \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

---
[1] Poisson Distribution

بطور کلی وقتی $n \geq 20$ و $\theta \leq 0.05$ باشد ، توزیع پواسون تقریب خوبی برای احتمالهای دو جمله ای خواهد بود . وقتی $n \geq 100$ و $n\theta \leq 10$ باشد ، تقریب بسیار عالی است .

قضیه : میانگین و واریانس توزیع پواسون به صورت زیر است :

$$\mu = \lambda \quad , \qquad \sigma^2 = \lambda$$

اثبات : از آنجایی که توزیع پواسون را به عنوان صورت حدی توزیع دو جمله ای بدست آوردیم ، لذا میتوان فرمولهای میانگین و واریانس آن را با کاربرد همان شرایط حدی از روی میانگین و واریانس توزیع دو جمله ای بدست آورد .

$$\mu = n\theta = \lambda \qquad \sigma^2 = n\theta(1-\theta) = \lambda(1-\underset{\theta \to 0}{\theta}) = \lambda$$

مثال : یک دانشجو با احتمال 0.001 در یکی از کلاسهایش ممکن است تأخیر داشته باشد و تأخیرش در هر کلاس بر تأخیر یا عدم تأخیر او در سایر کلاسها اثری ندارد . اگر X تعداد دفعاتی باشد که او در 100 جلسه درسی آینده اش تأخیر خواهد داشت ، مطلوبست احتمال اینکه :

الف) اصلاً تأخیر نداشته باشد . ب) دقیقاً یک دفعه تأخیر داشته باشد .

راه اول :

$$x \sim b(x;100,0.001) \qquad n = 100 \quad , \qquad \theta = 0.001$$
$$P(X=0) = b(0;100,0.001) = (0.999)^{100} = 0.9048$$
$$P(X=1) = b(1;100,0.001) = \binom{100}{1}(0.001)(0.999)^{99} = 0.0906$$

راه دوم :

$$n = 100 \quad , \qquad \theta = 0.001 \qquad \Rightarrow \qquad n\theta = 0.1 = \lambda$$
$$P(X=0) = p(0;0.1) = \frac{(0.1)^0 e^{-0.1}}{0!} = e^{-0.1} = 0.9048$$
$$P(X=1) = p(1;0.1) = \frac{(0.1)^1 e^{-0.1}}{1!} = 0.1e^{-0.1} = 0.0905$$

8- فرآیند پواسون

مسائل زیادی وجود دارند که در آنها شاهد وقوع پیشامدهای گسسته در یک فاصله پیوسته می‌باشیم . برای مثال ، اتومبیل‌هایی که بین ساعت 8 تا 9 صبح وارد یک پارکینگ می شوند را در نظر بگیرید . ورود اتومبیل به پارکینگ یک پیشامد گسسته است ، زیرا زمان ورودش یک لحظه از دوره پیوسته یک ساعته مورد نظر ماست . یا بعنوان مثال دیگر ، ضایعاتی که در یک توپ 100 متری پارچه وجود دارد را درنظر بگیرید . در این حالت فاصله پیوسته طول 100 متر از پارچه است و پیشامدهای گسسته ضایعاتی است که در این توپ پارچه وجود دارد . هر یک از این مثالها را میتوان بعنوان یک فرآیند پواسون درنظر گرفت ، به شرطی که وقوع پیشامدهای گسسته در یک فاصله پیوسته مطابق تعریف زیر صورت گیرد.

تعریف : در یک فرآیند پواسون با پارامتر λ ، پیشامدهای گسسته در یک فاصله پیوسته (زمان، طول و غیره) به طریق زیر بوجود می‌آیند :

1) احتمال اینکه درفاصله‌ای به اندازه کافی کوتاه بطول h ، دقیقاً یک اتفاق رخ دهد ،تقریباً برابر λh باشد .

2) احتمال اینکه درفاصله‌ای به اندازه کافی کوتاه بطول h ، دواتفاق یا بیشتررخ دهد ، تقریباً برابرصفر باشد .

3) وقوع یک پیشامد در فاصله‌ای به طول h اثری بر وقوع یا عدم وقوع پیشامد در فاصله مجزای دیگری به همان طول h ندارد (وقوع پیشامدها مستقل از یکدیگرند) .

وقتی ورود اتومبیل‌ها به پارکینگ را مشاهده می‌کنیم ، مناسب است که فرض کنیم مثلاً در یک هزارم ثانیه بیشتر از یک اتومبیل وارد پارکینگ نمی‌شود ، و نیز ورود یا عدم ورود یک اتومبیل در یک هزارم ثانیه اول اثری بر ورود یا عدم ورود یک اتومبیل در یک هزارم ثانیه‌های بعدی نخواهد داشت .

وقتی که می‌گوییم پیشامدها به نسبت ثابت λ رخ می‌دهند ، منظور این نیست که درست λ پیشامد در واحد فاصله واقع می‌شوند ، بلکه منظور این است که میانگین تعداد پیشامدها در واحد فاصله برابر λ است .

8-1- تعریف توزیع پواسون بر اساس فرآیند پواسون

تعریف : یک فرآیند پواسون با پارامتر λ برای یک فاصله با طول t در نظر گرفته می‌شود . فرض کنید که متغیر تصادفی X تعداد پیشامدهایی باشد که رخ می‌دهند ، در این صورت X متغیر تصادفی پواسون با پارامتر λt میباشد .

$$p(x;\lambda t)=\frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!} \quad , \quad x=0,1,2,...$$

بنابراین بطور خلاصه می‌توان چنین گفت :

اگر فرضهای 1، 2 و 3 در مورد آزمایشی برقرار باشند ، تعداد اتفاقهایی که در یک فاصله ثابت با طول t رخ می‌دهند ، یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین λt است ، و می‌گوییم وقوع اتفاق‌ها در ارتباط با یک فرآیند پواسون با نرخ وقوع λ است . مقدار λ نرخ وقوع اتفاقات در واحد طول مورد نظر است .

مثال : فرض کنید تعداد تلفن‌هایی که به یک شرکت زده می‌شود یک فرآیند پواسون با پارامتر $\lambda = 120$ تلفن در ساعت باشد .

الف – توزیع احتمال تعداد تلفن‌هایی که در یک دوره یک دقیقه‌ای زده می‌شوند را بدست آورید .

ب – احتمال اینکه در این فاصله یک دقیقه‌ای تلفنی نشود را بدست آورید .

ج – احتمال اینکه در این فاصله یک دقیقه‌ای بین 1 تا 3 تلفن شود را بدست آورید .

الف – $X \sim p(x;\lambda t) \qquad \lambda=120 \qquad t=1/60 \qquad \lambda t=2$

$$p(x;2)=\frac{2^x e^{-2}}{x!} \quad ; \quad x=0,1,2,\ldots$$

ب – $P(X=0)=p(0;2)=\dfrac{2^0 e^{-2}}{0!}=0.1353$

ج – $P(1\le X\le 3)=p(1;2)+p(2;2)+p(3;2)=\dfrac{2^1 e^{-2}}{1!}+\dfrac{2^2 e^{-2}}{2!}+\dfrac{2^3 e^{-2}}{3!}=0.7216$

فصل چهارم

متغیرهای تصادفی پیوسته خاص

در این فصل برخی توزیع های احتمال در مورد متغیرهای تصادفی پیوسته خاص که دارای کاربردهای مهمی می باشند ، مورد مطالعه قرار خواهند گرفت .

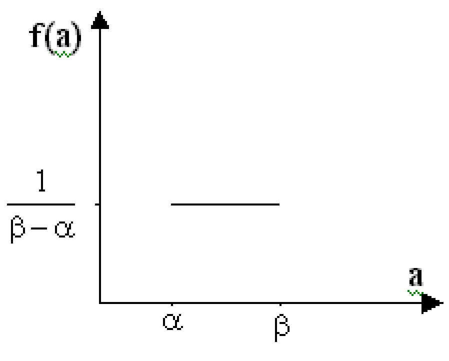
1- توزیع یکنواخت پیوسته

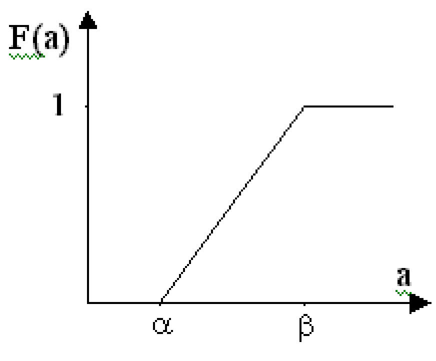
تعریف : متغیر تصادفی X دارای چگالی یکنواخت است و به آن متغیر تصادفی یکنواخت پیوسته گفته میشود ، اگر و فقط اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha} & , \quad \alpha<x<\beta \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی یکنواخت روی فاصله (α,β) به صورت زیر است :

$$F(a)=\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad F(a)=\begin{cases}0 & , \quad a\le\alpha \\ \dfrac{a-\alpha}{\beta-\alpha} & , \quad \alpha<a<\beta \\ 1 & , \quad a\ge\beta\end{cases}$$





قضیه : میانگین و واریانس چگالی یکنواخت به صورت زیر است :

$$\mu = \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2$$

اثبات به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود .

مثال : اتوبوس‌های مسافربری از ساعت 7 صبح با فواصل 15 دقیقه‌ای به ایستگاه مشخصی وارد می‌شوند .

اگر زمان رسیدن یک مسافر به ایستگاه مربوطه یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت بین 7 و 7:30 باشد ، مطلوب است احتمال آنکه :

الف) مسافر کمتر از 5 دقیقه منتظر اتوبوس باشد . ب) مسافر بیشتر از 10 دقیقه منتظر اتوبوس باشد .

حل :

مدت زمانی که از ساعت 7 گذشته و مسافر به ایستگاه می‌رسد ، یک متغیر تصادفی یکنواخت روی فاصله $(0,30)$ است که آن را با X نشان می‌دهیم .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & , \quad 0 < x < 30 \\ 0 & , \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) احتمال انتظار کمتر از 5 دقیقه $= P(10 < X < 15) + P(25 < X < 30)$

$$= \int_{10}^{15} \frac{1}{30} dx + \int_{25}^{30} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$$

ب) احتمال انتظار بیش از 10 دقیقه $= P(0 < X < 5) + P(15 < X < 20)$

$$= \int_{0}^{5} \frac{1}{30} dx + \int_{15}^{20} \frac{1}{30} dx = \frac{1}{3}$$

2- توزیع نمایی

اگر یک فرآیند پواسون با پارامتر λ داده شده باشد و نقطه شروع به مشاهده این فرآیند را با صفر مشخص کنیم . چنانچه متغیر تصادفی X ، بعنوان فاصله پیوسته (زمان ، طول و ...) مورد انتظار تا وقوع اولین پیشامد باشد ، آنگاه X دارای توزیع نمایی[1] با پارامتر λ خواهد بود . از آنجایی که این فاصله پیوسته و مثبت میباشد ، لذا نتیجه می‌گیریم که X یک متغیر تصادفی پیوسته است که بردش مجموعه اعداد مثبت میباشد . توزیع نمایی نه تنها در وقوع اولین پیشامد بکار می‌رود ، بلکه به دلیل استقلال پیشامدها (شرط سوم فرآیند پواسون) در فواصل انتظار بین پیشامدها هم کاربرد دارد . بطورخلاصه ، فاصله مابین وقوع پیشامدها در یک فرآیند پواسون ، متغیر تصادفی نمایی نامیده میشود . توزیع نمایی در عمل اغلب بعنوان توزیع مدت زمان انتظار تا وقوع یک پیشامد در فرآیند پواسون مطرح میگردد .

تعریف : متغیر تصادفی پیوسته X با تابع چگالی زیر را یک متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ می‌گوئیم .

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & , \quad x\ge 0\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}$$

تابع توزیع تجمعی $F(a)$ برای یک متغیر تصادفی نمایی به صورت زیر محاسبه می‌گردد :

$$F(a)=P(X\le a)=\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_0^a=1-e^{-\lambda a} \qquad a\ge 0$$

$$F(a)=\begin{cases}1-e^{-\lambda a}, & a\ge 0\\ 0 \quad , & a<0\end{cases}$$

همچنین خواهیم داشت :

$$P(X>a)=1-P(X\le a)=e^{-\lambda a}$$

قضیه : میانگین و واریانس توزیع نمایی با پارامتر λ به صورت زیر است :

$$E(X)=\frac{1}{\lambda} \qquad Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

[1] Exponential Distribution

مثال : فرض کنید مدت زمان یک مکالمه تلفنی بر حسب دقیقه یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین 10 دقیقه است . اگر شخصی درست قبل از شما به باجه تلفن برسد ، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه شما :

الف) بیش از 10 دقیقه   ب) بین 10 تا 20 دقیقه منتظر بمانید .

حل :

X : مدت زمان مکالمه شخص مورد نظر در باجه تلفن (دقیقه) $\equiv$ مدت زمان انتظار شما (دقیقه)

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}=10 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda=\frac{1}{10}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x} & , \quad x\geq 0\\ 0 & , \quad x<0\end{cases}$$

الف) $P(X>10)=e^{-\frac{1}{10}.10}=e^{-1}\approx 0.368$

ب) $P(10<X<20)=\int_{10}^{20}\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x}dx=-e^{\frac{-x}{10}}\Big|_{10}^{20}=e^{-1}-e^{-2}\approx 0.233$

1-2- خاصیت توزیع نمایی

تعریف : متغیر تصادفی غیر منفی X بدون حافظه نامیده می‌شود اگر برای همه s و t های مثبت داشته باشیم :

$$P(X>s+t \mid X>t)=P(X>s)$$

اگر X نشان دهنده طول عمر یک دستگاه باشد ، رابطه فوق بیان می‌کند ، احتمال اینکه دستگاه حداقل s+t ساعت کار کند در حالیکه t ساعت کار کرده باشد ، برابر است با احتمال اولیه اینکه دستگاه حداقل s ساعت دیگر کار کند . به بیان دیگر اگر دستگاه در لحظه t سالم باشد ، توزیع طول عمر باقیمانده دستگاه ، معادل توزیع طول عمر اولیه دستگاه است .

رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نشان داد :

$$P(X>s+t \mid X>t)=P(X>s) \quad \Rightarrow \quad \frac{P(X>s+t, X>t)}{P(X>t)}=P(X>s)$$

$$P(X>s+t)=P(X>s).P(X>t)$$

چون این رابطه برای توزیع نمایی صحیح است یعنی :

$$P(X>s+t)=e^{-\lambda(s+t)}=e^{-\lambda s}.\, e^{-\lambda t}=P(X>s).P(X>t)$$

بنابراین متغیر تصادفی نمایی یک متغیر بدون حافظه است .

مثال : فرض کنید طول عمر یک نوع لامپ دارای توزیع نمایی با میانگین یک سال است .

الف) احتمال اینکه یک لامپ بیش از 1.5 سال کار کند ، چقدر است ؟

ب) احتمال اینکه یک لامپ بیش از 1.5 سال کار کند ، وقتی بدانیم که بعد از یک سال هنوز سالم است ، چقدر خواهد بود ؟

حل : X : طول عمر لامپ (سال)

$$\lambda=1$$

الف) $P(X>1.5)=e^{-1.5\lambda}=e^{-\frac{3}{2}}\approx 0.220$

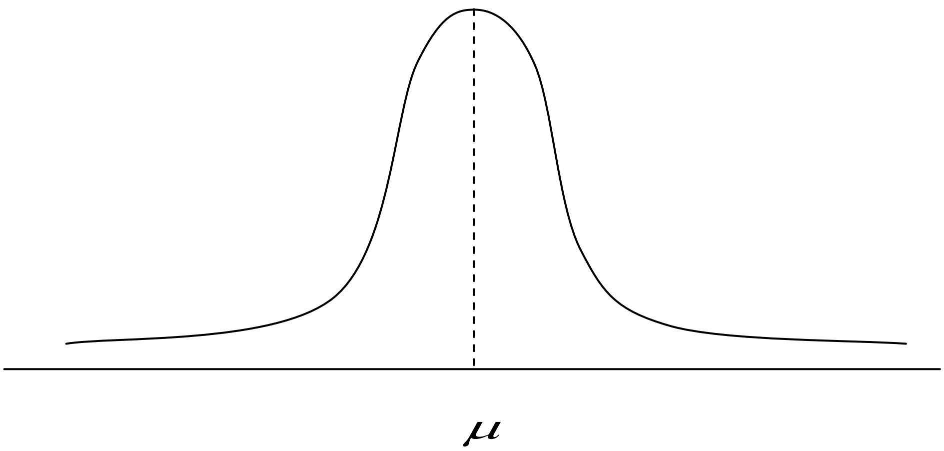
ب) $P(X>1.5 \mid X>1)=P(X>0.5)=e^{-0.5\lambda}=e^{-0.5}\approx 0.604$

3- توزیع نرمال

توزیع نرمال در ابتدا برای تقریب احتمال متغیرهای تصادفی دو جمله‌ای وقتی که n بزرگ باشد بکار رفت . همچنین بررسی در خطاهای اندازه‌گیری نشان داده که توزیعهای مربوط به خطاها را می‌توان به دقت با منحنی‌های پیوسته‌ای که آنها را منحنی‌های نرمال خطاها نامیدند ، تقریب زد .

تعریف : متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 است ، اگر و فقط اگر تابع چگالی احتمال X بصورت زیر باشد :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$



نمودار تابع چگالی فوق، زنگی شکل و حول μ متقارن است . $(\sigma > 0)$

نکته : پارامترهای μ و σ^2 در توزیع نرمال نشان دهنده میانگین و واریانس توزیع هستند .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad E(X) = \mu \quad , \quad Var(X) = \sigma^2$$

نکته : اگر X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد ، آنگاه $Y=\alpha X+\beta$ نیز دارای توزیع نرمال با پارامترهای $\alpha\mu+\beta$ و $\alpha^2\sigma^2$ است .

$$X \sim N(\mu , \sigma^2) \quad \Rightarrow \quad Y=\alpha X+\beta \sim N(\alpha\mu+\beta, \alpha^2\sigma^2)$$

نکته : مساحت کل زیر منحنی نرمال مساوی یک است .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$$

تعریف : توزیع نرمال با $\mu=0$ و $\sigma^2=1$ ، توزیع نرمال استاندارد نامیده می‌شود .

چون توزیع نرمال نقشی پایه‌ای در آمار بازی می‌کند و از چگالی آن نمی‌توان مستقیماً انتگرال‌گیری کرد ، مساحتهای زیرمنحنی نرمال را برای توزیع نرمال استاندارد درجداولی تهیه کرده‌اند .

قضیه : اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ باشد، آنگاه $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ دارای توزیع نرمال استاندارد خواهد بود .

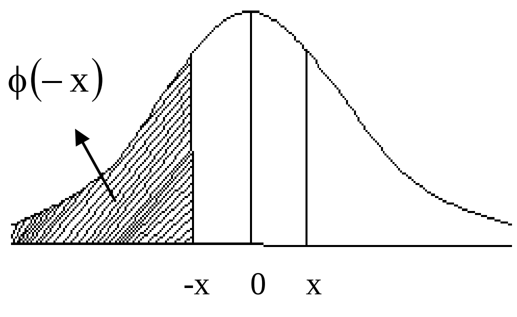
$$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right) \Rightarrow Z \sim N(0,1)$$

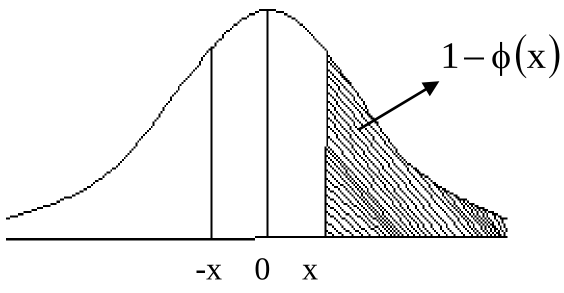
تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نرمال استاندارد را با $\varphi(x)$ نمایش می‌دهند .

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

نکته 1 : با استفاده از خاصیت تقارن چگالی نرمال استاندارد می‌توان نشان داد که :

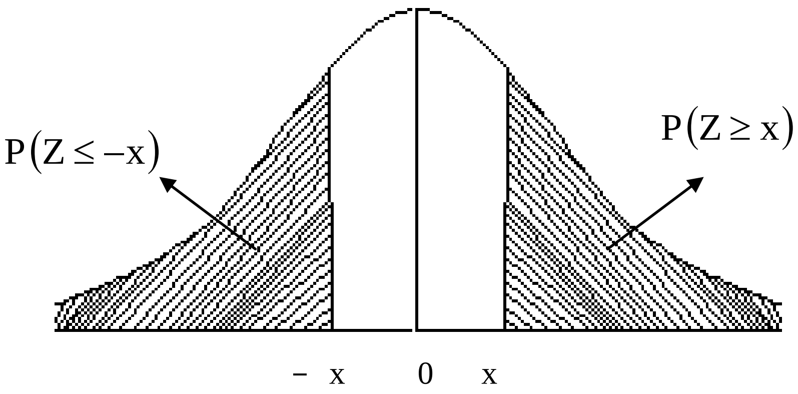
$$\varphi(-x) = 1-\varphi(x) \qquad\qquad -\infty < x < \infty$$





نکته 2 : با استفاده از رابطه فوق میتوان نشان داد که اگر Z یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد ، آنگاه :

$$P(Z \leq -x) = P(Z \geq x) \qquad -\infty < x < \infty$$



نکته 3 : وقتی که X دارای توزیع نرمال با پارامترهای μ و σ^2 باشد ، آنگاه $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد است .

مثال : اگر X یک متغیر تصادفی نرمال با پارامترهای $\mu = 3$ و $\sigma^2 = 9$ باشد، مطلوبست محاسبهٔ :

الف) $P(2 < X < 5)$

ب) $P(X > 0)$

ج) $P(|X-3| > 6)$

حل :

الف)

$$
\begin{aligned}
P(2 < X < 5) &= P\left(\frac{2-3}{3} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{5-3}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right) \\
&= \varphi\left(\frac{2}{3}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{3}\right) = \varphi\left(\frac{2}{3}\right) - \left[1 - \varphi\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \varphi\left(\frac{2}{3}\right) + \varphi\left(\frac{1}{3}\right) - 1 \\
&\approx 0.7486 + 0.6293 - 1 = 0.3779
\end{aligned}
$$

ب)

$$
\begin{aligned}
P(X > 0) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{0-3}{3}\right) = P(Z > -1) \\
&= P(Z < +1) = \varphi(1) \approx 0.8413
\end{aligned}
$$

ج)

$$
\begin{aligned}
P(|X-3| > 6) &= P\{(X-3) > 6\} + P\{(X-3) < -6\} \\
&= P(X > 9) + P(X < -3) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{9-3}{3}\right) + P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{-3-3}{3}\right) \\
&= P(Z > 2) + P(Z < -2) = 1 - \varphi(2) + \varphi(-2) = 1 - \varphi(2) + 1 - \varphi(2) \\
&= 2 - 2\varphi(2) \approx 2 - (2 \times 0.9772) = 0.0456
\end{aligned}
$$

3-1- تقریب توزیع دو جمله‌ای بوسیله توزیع نرمال

اگر یک متغیر تصادفی دو جمله‌ای با پارامترهای n و θ را با کم کردن میانگین $n\theta$ و سپس تقسیم نتیجه به انحراف معیار $\sqrt{n\theta(1-\theta)}$ بصورت استاندارد درآوریم ، آنگاه این متغیر تصادفی استاندارد شده وقتی که n بزرگ باشد ، دارای توزیع نرمال استاندارد خواهد بود .

قضیه : اگر X نشان دهنده تعداد پیروزی‌ها در n آزمایش ساده مستقل هر کدام با احتمال پیروزی θ باشد آنگاه برای هر $a < b$ ، وقتی که $n \to \infty$ خواهیم داشت :

$$X \sim b(x; n, \theta) \Rightarrow Z = \frac{X - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \sim N(0,1)$$

یا بعبارت دیگر :

$$P\left(a \le \frac{X - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \le b\right) \to \varphi(b) - \varphi(a)$$

در حالت کلی تقریب نرمال برای مقادیر n که در رابطه $n\theta(1-\theta) \ge 10$ صدق می‌کنند ، نسبتاً خوب عمل می‌کند .

مثال : اگر یک سکه سالم 40 بار پرتاب شود ، مطلوبست احتمال اینکه تعداد شیرهای ظاهر شده برابر 20 باشد .

حل : $n\theta(1-\theta) = 10$ $\qquad n\theta = 20$ $\qquad$ تعداد شیرهای ظاهر شده در 40 بار پرتاب : X

چون متغیر تصادفی دو جمله‌ای یک متغیر گسسته و متغیر تصادفی نرمال یک متغیر تصادفی پیوسته است ، احتمال مورد نظر را می‌توان بصورت زیر نوشت :

$$P(X=20)=P(19.5<X<20.5)=P\left(\frac{19.5-20}{\sqrt{10}}<\frac{X-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}<\frac{20.5-20}{\sqrt{10}}\right)$$

$$=P\left(-0.16<\frac{X-n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}<0.16\right)=\varphi(0.16)-\varphi(0.16)$$

$$=\varphi(0.16)-1+\varphi(0.16)\approx(0.5636\times 2)-1=0.1272$$

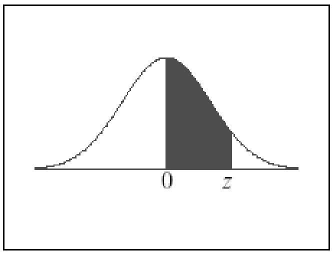
جواب دقیق برابر است با :

$$P(X=20)=\binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{40}\approx 0.1254$$

2-3- جدول توزیع نرمال استاندارد

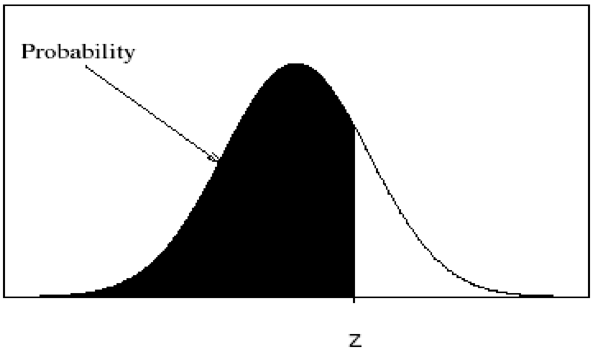
جدول توزیع نرمال استاندارد معمولاً به یکی از دو صورت زیر داده می‌شود :

Standard Normal Distribution Table



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

Table entry for z is the probability lying to the left of z



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

فصل پنجم

متغیرهای تصادفی با توزیع توأم

1– مقدمه

متغیرهای تصادفی زیادی را میتوان روی یک فضای نمونه‌ای تعریف کرد . به عنوان مثال در ارتباط با فضای نمونه‌ای پرتاب یک جفت تاس ، یک متغیر تصادفی را میتوان به عنوان مجموع مقادیر ظاهر شده در نظرگرفت . علاوه برآن میتوان متغیرهای تصادفی دیگری را نیز متناظر با حاصلضرب و یا تفاضل مقادیر ظاهر شده و غیره در نظر گرفت .

2– توزیع توأم دو متغیر تصادفی

در این قسمت ابتدا به حالت دو متغیره می‌پردازیم ، یعنی به وضعیت‌هایی با یک جفت متغیر تصادفی که همزمان روی یک فضای نمونه‌ای توأم تعریف شده‌اند ، توجه می‌کنیم . سپس این بحث را به حالت چند متغیره که هر تعداد متناهی از متغیرهای تصادفی را شامل میشود ، تعمیم خواهیم داد .

2-1– توزیع توأم دو متغیر تصادفی گسسته

اگر X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند ، احتمال اینکه X مقدار x و Y مقدار y را بگیرد ، به صورت $P(X=x\ ,\ Y=y)$ نوشته میشود . بنابراین $P(X=x\ ,\ Y=y)$ متناظر با احتمال اشتراک پیشامدهای $X=x$ و $Y=y$ است .

تعریف : اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند ، تابعی که با $f(x,y)=P(X=x\ ,\ Y=y)$ برای هر جفت مقدار (x,y) در برد X و Y داده می‌شود ، تابع احتمال توأم یا توزیع احتمال توأم X و Y نامیده می‌شود .

قضیه : تابع دو متغیره $f(x,y)$ فقط و فقط وقتی میتواند بعنوان تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y بکار رود که مقادیر آن در شرایط زیر صدق کند :

1) به ازای هر جفت مقدار (x,y) در حوزه مربوطه ، $f(x,y) \geq 0$ باشد .

2) $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$.

تعریف : اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند ، تابعی که بصورت زیر تعریف می‌شود ، تابع توزیع توأم یا توزیع تجمعی توأم X و Y نامیده می‌شود .

$$F(x,y) = P(X \leq x\ ,\ Y \leq y) = \sum_{s \leq x} \sum_{t \leq y} f(s,t)\ ;\ -\infty < x < \infty\ ,\ -\infty < y < \infty$$

که در آن $f(s,t)$ تابع احتمال توأم X و Y در (s,t) است .

2-2- توزیع توأم دو متغیر تصادفی پیوسته

حال مفاهیم فوق الذکر را برای حالت پیوسته در نظر می‌گیریم .

تعریف : یک تابع دومتغیره با مقادیر $f(x,y)$ که روی صفحه xy تعریف شده است ، تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y نامیده میشود ، اگر و فقط اگر برای هر ناحیه A از صفحه xy داشته باشیم :

$$P\left[\ (X,Y) \in A\ \right] = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

قضیه : تابع دو متغیره $f(x,y)$ را میتوان به عنوان تابع چگالی احتمال توأم یک جفت متغیر تصادفی پیوسته X و Y بکار برد ، در صورتی که مقادیر آن در شرایط زیر صدق کند :

1) $f(x,y) \geq 0$ به ازای $-\infty < x < \infty$ و $-\infty < y < \infty$.

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

تعریف : اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته باشند ، تابعی که بصورت زیر داده شده است ، تابع توزیع توأم X و Y نامیده می‌شود :

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(s,t)\,ds\,dt \quad ; \quad -\infty<x<\infty \ , \ -\infty<y<\infty$$

که در آن $f(s,t)$ چگالی احتمال توأم X و Y در (s,t) است .

ازروی تابع توزیع توأم دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y، میتوان تابع چگالی احتمال توأم آنها را تعیین نمود .

قضیه : چگالی توأم را در تمام نقاط (x,y) که به ازای آنها چگالی توأم پیوسته است ، می‌توان توسط رابطه زیر بدست آورد :

$$f(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}F(x,y)$$

چگالی توأم را هر جا که با رابطه بالا تعریف نمی‌شود برابر صفر می‌گیریم .

قضیه : (برای حالت گسسته و پیوسته)

$$P(a_1<X\le a_2\ ,\ b_1<Y\le b_2)=F(a_2,b_2)+F(a_1,b_1)-F(a_1,b_2)-F(a_2,b_1)$$

3-2- توزیع‌های حاشیه‌ای (کناری)

تعریف : درحالتی که X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند ، تابع احتمال X و تابع احتمال Y (که به آنها تابع احتمال کناری یا حاشیه‌ای می گویند) ، از روی تابع احتمال توأم X و Y بصورت زیر بدست می‌آیند :

$$f(x,y)=P(X=x,Y=y)$$

$$f_X(x)=P(X=x)=\sum_{y} f(x,y)$$

$$f_Y(y)=P(Y=y)=\sum_{x} f(x,y)$$

تعریف : اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته و $f(x,y)$ تابع چگالی احتمال توأم آنها باشد ، توابع چگالی کناری (حاشیه‌ای) آنها بصورت زیر بدست می‌آید :

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \quad , \quad -\infty<x<\infty$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \quad , \quad -\infty<y<\infty$$

3- توزیع توأم n متغیر تصادفی

تمام تعریف‌های قبلی مربوط به دو متغیر تصادفی را می‌توان به حالت n متغیر تصادفی تعمیم داد .

تعریف : اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی گسسته باشند ، خواهیم داشت :

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=P(X_1=x_1,X_2=x_2,...,X_n=x_n)$$

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=P(X_1\le x_1\ ,\ X_2\le x_2,...,X_n\le x_n)$$
$$=\sum_{s_1\le x_1}\sum_{s_2\le x_2}\cdots\sum_{s_n\le x_n} f(s_1,s_2,\ldots,s_n) \quad ; \quad -\infty<x_i<\infty\ ,\ i=1,2,\cdots,n$$

تعریف : اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی پیوسته باشند ، خواهیم داشت :

$$P\left[\ (X_1,X_2,\ldots,X_n)\in E^n\ \right]=\int\int\underset{E^n}{\cdots}\int\int f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n$$

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_1} f(t_1,t_2,...,t_n)dt_1\,dt_2...dt_n$$

به ازای : $-\infty<x_1<\infty\ ,\ -\infty<x_2<\infty\ ,\ \cdots,-\infty<x_n<\infty$.

و همچنین هر جا مشتقات جزئی وجود داشته باشد ، با استفاده از مشتق‌گیری جزئی خواهیم داشت :

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\,\partial x_2\ldots\partial x_n}F(x_1,x_2...,x_n)$$

وقتی با بیش از دو متغیر تصادفی سروکار داریم ، نه تنها می‌توانیم از توزیع‌های حاشیه‌ای تک‌تک متغیرهای تصادفی صحبت کنیم ، بلکه توزیع‌های حاشیه‌ای توأم چند متغیر تصادفی را نیز خواهیم داشت .

به عنوان نمونه اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی گسسته باشند ، تابع احتمال حاشیه‌ای X_1 بصورت زیر می‌باشد :

$$f_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

همچنین تابع احتمال حاشیه‌ای توأم X_1 و X_2 و X_3 بصورت زیر می‌باشد :

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{x_4} \cdots \sum_{x_n} f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

اگر $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال توأم $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ باشند ، چگالی حاشیه‌ای X_2 به ازای $-\infty < x_2 < \infty$ بصورت زیر می‌باشد :

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_3 ... dx_n$$

همچنین چگالی حاشیه‌ای توأم X_1 و X_n به ازای $-\infty < x_1 < \infty$ و $-\infty < x_n < \infty$ بصورت زیر می‌باشد :

$$f_{X_1,X_n}(x_1, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n) dx_2 dx_3 ... dx_{n-1}$$

مثال : دو قرص به تصادف از شیشه‌ای که محتوی 3 قرص آسپرین ، 2 قرص خواب‌آور و 4 قرص قلب است ، انتخاب می‌کنیم . اگر X و Y به ترتیب نشان دهنده تعداد قرصهای آسپرین و قرصهای خواب‌آور انتخابی باشند ، مطلوبست :

الف) مقادیر احتمال توأم X و Y. ب) محاسبه $F(1,1)$. ج) مقدار احتمال حاشیه‌ای X .

حل : $f(x,y)=P(X=x\ ,\ Y=y)\quad ;\quad x=0,1,2\quad ;\quad y=0,1,2$

الف)

$$f(0,0)=P(X=0\ ,\ Y=0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{6}{36}$$

$$f(0,1)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{36}=\frac{8}{36}\qquad f(1,0)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{4}{1}}{36}=\frac{12}{36}$$

$$f(2,0)=\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{4}{0}}{36}=\frac{3}{36}\qquad f(0,2)=\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{4}{0}}{36}=\frac{1}{36}$$

$$f(1,1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{0}}{36}=\frac{6}{36}$$

Y \ X	0	1	2	جمع روی سطرها $P(X=x)$
0	$\frac{6}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{15}{36}$
1	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$		$\frac{18}{36}$
2	$\frac{3}{36}$			$\frac{3}{36}$
جمع روی ستونها $P(Y=y)$	$\frac{21}{36}$	$\frac{14}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

ب)

$$F(1,1)=P(X\le 1,Y\le 1)=f(0,0)+f(0,1)+f(1,0)+f(1,1)=\frac{6}{36}+\frac{8}{36}+\frac{12}{36}+\frac{6}{36}=\frac{32}{36}$$

ج)
$$f_X(x)=\sum_{y} f(x,y)$$

$$f_X(0)=\sum_{y=0}^{2} f(0,y)=\frac{6}{36}+\frac{8}{36}+\frac{1}{36}=\frac{15}{36}$$

$$f_X(1)=\sum_{y=0}^{1} f(1,y)=\frac{12}{36}+\frac{6}{36}=\frac{18}{36}$$

$$f_X(2)=\sum_{y=0}^{0} f(2,y)=\frac{3}{36}$$

مثال : اگر تابع چگالی احتمال توأم X و Y بصورت زیر باشد :

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{5}x(x+y)\ , & 0<y<2\ ,\ 0<x<1\\ 0 & ,\quad \text{سایرجاها}\end{cases}$$

$P\left[(X,Y)\in A\right]$ را که در آن $A=\left\{(x,y)\middle|\, 0<x<\frac{1}{2}\ ,\ 1<y<2\right\}$ است ، پیدا کنید .

$$P\left[(X,Y)\in A\right]=P\left(0<X<\frac{1}{2}\ ,\ 1<Y<2\right)$$

$$=\int_1^2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3}{5}x(x+y)\,dx\,dy=\int_1^2\left[\frac{3x^2y}{10}+\frac{3x^3}{15}\right]\Bigg/_{x=0}^{x=\frac{1}{2}}dy=\int_1^2\left(\frac{3y}{40}+\frac{1}{40}\right)dy$$

$$=\left[\frac{3y^2}{80}+\frac{y}{40}\right]\Bigg/_1^2=\frac{11}{80}$$

مثال : اگر چگالی توأم X و Y بصورت زیر باشد :

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<1\ ,\ 0<y<1 \\ 0 & ,\quad \text{سایرجاها} \end{cases}$$

تابع توزیع توأم X و Y را بدست آورید .

$$x<0 \ \text{یا}\ y<0 \Rightarrow f(x,y)=0 \Rightarrow F(x,y)=0$$

$$0<x<1\ ,\ 0<y<1 \Rightarrow F(x,y)=\int_0^y\int_0^x (s+t)\,ds\,dt=\frac{1}{2}xy(x+y)$$

$$0<x<1\ ,\ y>1 \Rightarrow F(x,y)=\int_0^1\int_0^x (s+t)\,ds\,dt=\frac{1}{2}x(x+1)$$

$$x>1\ ,\ 0<y<1 \Rightarrow F(x,y)=\int_0^y\int_0^1 (s+t)\,ds\,dt=\frac{1}{2}y(y+1)$$

$$x>1\ ,\ y>1 \Rightarrow F(x,y)=\int_0^1\int_0^1 (s+t)\,ds\,dt=1$$

چون توزیع توأم همه جا پیوسته است ، کرانهای بین هر دو ناحیه از این نواحی را میتوان در یکی از آنها منظور کرد .

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \ \text{یا}\ y\le 0 \\ \frac{1}{2}xy(x+y) & 0<x<1\ ,\ 0<y<1 \\ \frac{1}{2}x(x+1) & 0<x<1\ ,\ y\ge 1 \\ \frac{1}{2}y(y+1) & x\ge 1\ ,\ 0<y<1 \\ 1 & x\ge 1\ ,\ y\ge 1 \end{cases}$$

مثال : اگر تابع توزیع توأم X و Y بصورت زیر داده شده باشد :

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-y}\right) & x>0\ ,\ y>0\\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$$

$P\left(1<X<3\ ,\ 1<Y<2\right)$ را بدست آورید .

راه حل اول :

$$P\left(1<X<3\,,1<Y<2\right)=F(3,2)+F(1,1)-F(1,2)-F(3,1)$$
$$=\left(1-e^{-3}\right)\left(1-e^{-2}\right)+\left(1-e^{-1}\right)\left(1-e^{-1}\right)-\left(1-e^{-1}\right)\left(1-e^{-2}\right)-\left(1-e^{-3}\right)\left(1-e^{-1}\right)=0.074$$

راه حل دوم :

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}F(x,y)=e^{-x}.e^{-y}=e^{-(x+y)}\qquad x>0\ ,\ y>0$$

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & x>0\ ,\ y>0\\ 0 & \text{سایرجاها}\end{cases}$$

$$P\left(1<X<3\,,1<Y<2\right)=\int_1^2\int_1^3 e^{-(x+y)}\,dxdy=\left(e^{-1}-e^{-3}\right)\left(e^{-1}-e^{-2}\right)=0.074$$

مثال : اگر چگالی احتمال توأم سه متغیر تصادفی X_1 و X_2 و X_3 بصورت زیر باشد :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_1 + x_2) e^{-x_3} & 0 < x_1 < 1 , 0 < x_2 < 1 , x_3 > 0 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

الف) $P\left(0 < X_1 < \frac{1}{2} \;,\; \frac{1}{2} < X_2 < 1 \;,\; X_3 < 1\right)$ را بدست آورید .

ب) چگالی حاشیه‌ای توأم X_1 و X_3 و چگالی حاشیه‌ای X_1 را پیدا کنید .

الف)

$$P\left(0 < X_1 < \frac{1}{2} \;,\; \frac{1}{2} < X_2 < 1 \;,\; X_3 < 1\right) = \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{\frac{1}{2}} (x_1 + x_2) e^{-x_3} dx_1 \, dx_2 \, dx_3$$

$$= \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{8} + \frac{x_2}{2}\right) e^{-x_3} dx_2 \, dx_3 = \int_0^1 \frac{1}{4} e^{-x_3} dx_3 = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-1}\right) = 0.158$$

ب) به ازای $0 < x_1 < 1$ و $x_3 > 0$

$$f_{X_1, X_3}(x_1, x_3) = \int_0^1 (x_1 + x_2) e^{-x_3} \, dx_2 = \left(x_1 + \frac{1}{2}\right) e^{-x_3}$$

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^\infty \int_0^1 f(x_1, x_2, x_3) dx_2 \, dx_3 = \int_0^\infty \left(x_1 + \frac{1}{2}\right) e^{-x_3} dx_3 = x_1 + \frac{1}{2}$$

$$f_{X_1, X_3}(x_1, x_3) = \begin{cases} (x_1 + \frac{1}{2}) e^{-x_3} & 0 < x_1 < 1 \;,\; x_3 > 0 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} (x_1 + \frac{1}{2}) & 0 < x_1 < 1 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

4- توزیع های شرطی

تعریف : اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته باشند ، خواهیم داشت :

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=P(X=x\,|\,Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} \quad ; \quad P(Y=y)\neq 0$$

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=P(Y=y\,|\,X=x)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)} \quad ; \quad P(X=x)\neq 0$$

تعریف : اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته با چگالی توأم $f(x,y)$ باشند ، خواهیم داشت :

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad ; \quad f_Y(y)\neq 0 \qquad f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)} \quad ; \quad f_X(x)\neq 0$$

وقتی با بیش از دو متغیر تصادفی سروکار داریم ، خواه پیوسته و خواه گسسته ، می توانیم انواع بسیار متفاوتی از توزیع ها یا چگالیهای شرطی را در نظر بگیریم . به عنوان نمونه اگر $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ تابع احتمال توأم متغیرهای تصادفی گسسته X_1,X_2,X_3,X_4 باشد ، میتوان نوشت :

$$f(x_3\,|\,x_1,x_2,x_4)=\frac{f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{f_{X_1,X_2,X_4}(x_1,x_2,x_4)}$$

که در آن $f_{X_1,X_2,X_4}(x_1,x_2,x_4)$ تابع احتمالی حاشیه ای توأم X_1,X_2,X_4 است .

5- استقلال متغیرهای تصادفی

تعریف : متغیرهای تصادفی گسسته X و Y مستقل هستند ، اگر و فقط اگر برای همه مقادیر x و y داشته باشیم :

$$f(x,y)=P(X=x,Y=y)=P(X=x).P(Y=y)$$

تعریف : متغیرهای تصادفی پیوسته X و Y مستقل هستند ، اگر و فقط اگر برای همه مقادیر x و y داشته باشیم :

$$f(x,y)=f_X(x).f_Y(y)$$

تعریف : اگر n متغیر تصادفی گسسته (پیوسته) $X_1, X_2, ..., X_n$ با تابع احتمال توأم (چگالی احتمال توأم) $f(x_1,x_2,...,x_n)$ مستقل باشند ، خواهیم داشت :

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=f_{X_1}(x_1).f_{X_2}(x_2)....f_{X_n}(x_n)$$

مثال : با توجه به چگالی توأم زیر ، چگالی شرطی X به شرط Y=y را پیدا کنید و سپس $P(X\le\frac{1}{2}\mid Y=\frac{1}{2})$ را محاسبه نمائید .

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{3}(x+2y) & 0<x<1 \quad , \quad 0<y<1\\ 0\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_0^1\frac{2}{3}(x+2y)dx=\frac{1}{3}(1+4y)$$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{\frac{2}{3}(x+2y)}{\frac{1}{3}(1+4y)}=\frac{2x+4y}{1+4y} \qquad , \qquad 0<x<1$$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{2x+4y}{1+4y} & , \quad 0<x<1\\ 0 & \text{سایر جاها}\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x\mid \tfrac{1}{2})=\frac{2x+4\times\frac{1}{2}}{1+4\times\frac{1}{2}}=\frac{2x+2}{3}$$

$$P(X\le\tfrac{1}{2}\mid Y=\tfrac{1}{2})=\int_0^{1/2}\frac{2x+2}{3}dx=\frac{5}{12}$$

فصل ششم

خواص امید ریاضی

1- امید ریاضی توابعی از متغیرهای تصادفی

مفهوم امید ریاضی را به آسانی می‌توان به وضعیت‌هائی که شامل دو یا چند متغیر تصادفی‌اند تعمیم داد. برای نمونه اگر Z متغیری تصادفی باشد که مقادیرش به مقادیر دو متغیر تصادفی X,Y بوسیله معادله Z=g(X,Y) مربوط است ، آنگاه قضیه زیر را خواهیم داشت :

قضیه : اگر X,Y متغیرهای تصادفی گسسته بوده و f(x,y) مقدار تابع احتمال توأم آنها در (x,y) باشد ، آنگاه :

$$E[g(X,Y)] = \sum_{x}\sum_{y} g(x,y).f(x,y)$$

ونیز اگر X,Y متغیرهای تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال توأم f(x,y) باشند، خواهیم داشت :

$$E\left[g(X,Y)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y).f(x,y)dx\,dy$$

این قضیه را می‌توان برای توابعی از هر تعداد متناهی متغیرهای تصادفی تعمیم داد .

قضیه : اگر $c_1, c_2, \ldots, c_n$ مقادیر ثابت باشند ، آنگاه :

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(X_1, X_2, \ldots, X_k)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i E\left[g_i(X_1, X_2, \ldots, X_k)\right]$$

مثال : اگر تابع چگالی احتمال توأم X وY بصورت زیر باشد مقدار مورد انتظار $g(X,Y) = X/Y^3$ را پیدا کنید .

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{7}(x+2y) & 0<x<1 \ ,\ 1<y<2 \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

$$E(X/Y^3) = \int_1^2\int_0^1 \frac{2x(x+2y)}{7y^3}dx\,dy = \frac{2}{7}\int_1^2\left(\frac{1}{3y^3} + \frac{1}{y^2}\right)dy = \frac{15}{84}$$

قضیه : اگر $g(X,Y)= X + Y$ باشد ، آنگاه خواهیم داشت :

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

اثبات (برای حالت پیوسته) :

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)\,dy\,dx+$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}x\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy\right]dx+\int_{-\infty}^{\infty}y\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx\right]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x.f_X(x)\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}y.f_Y(y)\,dy=E(X)+E(Y)$$

قضیه :

$$E(X_1+X_2+\ldots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots.+E(X_n)$$

قضیه : اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند ، آنگاه برای همه توابع g و h خواهیم داشت :

$$E[g(X).h(Y)]=E[g(X)].E[h(Y)]$$

اثبات به عنوان تمرین .

قضیه : اگر $X_1, X_2, \ldots., X_n$ مستقل باشند ، آنگاه خواهیم داشت :

$$E(X_1X_2\ldots X_n)=E(X_1).E(X_2)\ldots E(X_n)$$

2- کوواریانس و واریانس مجموع متغیرهای تصادفی

همانطور که امید ریاضی و واریانس یک متغیر تصادفی ، اطلاعاتی را درباره متغیر تصادفی ارائه می‌دهند .کوواریانس بین دو متغیر تصادفی نیز اطلاعاتی را در مورد رابطه بین دو متغیر تصادفی ارائه میدهد .

تعریف : کوواریانس بین دو متغیر تصادفی X و Y که با $Cov(X,Y)$ یا $\sigma_{X,Y}$ نمایش داده می‌شود ، عبارتست از :

$$Cov(X,Y) = \sigma_{X,Y} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

یا به صورت ساده‌تر :

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E[XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X).E(Y) \end{aligned}$$

اگر X و Y مستقل باشند نتیجه می‌شود که $Cov(X,Y) = 0$. اما عکس مطلب همیشه برقرار نیست .

قضیه (خواص کوواریانس) :

1) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

2) $Cov(X,X) = Var(X)$

3) $Cov(aX,Y) = a.Cov(X,Y)$

4) $Cov\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Cov(X_i, Y_j)$

با استفاده از خواص کوواریانس رابطه زیر به راحتی اثبات می گردد .

قضیه : واریانس مجموع متغیرهای تصادفی بصورت زیر خواهد بود :

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum Cov\ (X_i, X_j)$$

2-1- ضریب همبستگی

ضریب همبستگی دو متغیر تصادفی X,Y را بصورت زیر نشان می‌دهیم :

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X).Var(Y)}}=\frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X.\sigma_Y} \qquad Var(X)>0, Var(Y)>0$$

بسادگی می‌توان نشان داد که $-1\leq\rho(X,Y)\leq 1$.

ضریب همبستگی میزان وجود رابطه خطی بین X,Y را نشان می‌دهد. نزدیک بودن $\rho(X,Y)$ به 1+ یا 1- بیانگر وجود رابطه خطی بین X و Y است ، در حالیکه مقدار نزدیک به صفر بیانگر عدم وجود چنین رابطه‌ای است . مقدار مثبت $\rho(X,Y)$ بیانگر آن است که وقتی مقدار X افزایش یابد مقدار Y نیز افزایش می‌یابد . در حالیکه مقدار منفی $\rho(X,Y)$ بیانگر آن است که وقتی مقدار X زیاد شود مقدار Y کاهش می‌یابد .

3- امید ریاضی شرطی

تعریف : اگر X و Y متغیرهای تصادفی گسسته و $f_{X|Y}(x|y)=P(X=x|Y=y)$ تابع احتمالی شرطی X به شرط $Y=y$ باشد ، امید شرطی $u(X)$ به شرط $Y=y$ برابر است با :

$$E[u(X)|Y=y]=\sum_x u(x).f_{X|Y}(x|y)$$

همچنین اگر X و Y متغیرهای تصادفی پیوسته و $f_{X|Y}(x|y)$ چگالی احتمال شرطی X به شرط $Y=y$ باشد، امید شرطی $u(X)$ به شرط $Y=y$ برابر است با :

$$E\left[u(X)|Y=y\right]=\int_{-\infty}^{\infty}u(x).f_{X|Y}(x|y)\,dx$$

اگر در تعریف فوق $u(X)=X$ باشد، میانگین شرطی متغیر تصادفی X به شرط $Y=y$ بدست می‌آید که آن را بصورت $\mu_{X|y}=E(X|Y=y)$ نمایش می‌دهیم .

4- واریانس شرطی

واریانس شرطی X به شرط Y=y برابر است با :

$$Var(X \mid Y=y) = E(X^2 \mid Y=y) - [E(X \mid Y=y)]^2$$

مثال : اگر تابع چگالی توأم دو متغیر تصادفی X و Y بصورت زیر باشد ، میانگین شرطی و واریانس شرطی X به شرط $Y = \frac{1}{2}$ را پیدا کنید .

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+2y); & 0<x<1, \quad 0<y<1 \\ 0 \end{cases}$$

حل : قبلاً چگالی شرطی X به شرط Y=y را به صورت زیر بدست آورده ایم :

$$f_{X1Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{2x+4y}{1+4y}; & 0<x<1 \\ 0 \end{cases}$$

$$f_{X1Y}(x|{}^1\!/_2) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+1); & 0<x<1 \\ 0 \end{cases}$$

$$E(X \mid {}^1\!/_2) = \int_0^1 \frac{2}{3}x(x+1)dx = \frac{5}{9}$$

$$E(X^2 \mid {}^1\!/_2) = \int_0^1 \frac{2}{3}x^2(x+1)dx = \frac{7}{18}$$

$$Var(X \mid {}^1\!/_2) = \frac{7}{18} - (\frac{5}{9})^2 = \frac{13}{162}$$

5- گشتاورها

بین امیدهای ریاضی که در آمار اهمیت خاصی دارند ، از گشتاورهای متغیرهای تصادفی باید نام برد .

تعریف : r امین گشتاور حول مبدأ متغیر تصادفی X که با μ'_r نشان داده می شود . امید ریاضی X^r است .

$$\mu'_r = E(X^r) = \sum_x x^r.f(x) \qquad ; \; r = 0,1,2,\ldots$$ وقتی X گسسته است

$$\mu'_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r.f(x)\,dx \qquad ; \; r = 0,1,2,\ldots$$ وقتی X پیوسته است

$$\mu'_0 = E(X^0) = E(1) = 1 \qquad \mu'_1 = E(X) = \mu \qquad \mu'_2 = E(X^2)$$

تعریف : گشتاور r ام حول میانگین متغیر تصادفی X که آن را با μ_r نشان می دهیم ، امید ریاضی $(X-\mu)^r$ است .

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right] = \sum_x (x-\mu)^r.f(x) \qquad ; \; r = 0,1,2,\ldots$$ وقتی X گسسته است

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r.f(x)dx \qquad ; \; r = 0,1,2,\ldots$$ وقتی X پیوسته است

$$\mu_1 = E(X-\mu) = E(X) - \mu = 0 \qquad \mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = Var(X)$$

5-1- تابع مولد گشتاورها

گرچه گشتاورهای بیشتر توزیع ها را میتوان مستقیماً با محاسبه انتگرالها یا مجموعهای لازم معین کرد ، ولی شیوهٔ دیگری نیز وجود دارد که در آن از تابع مولد گشتاورها استفاده می گردد .

تعریف : تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی X در صورت وجود عبارت است از :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_x e^{tx}.f(x)$$ وقتی X گسسته با تابع احتمال $f(x)$ باشد

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}.f(x)\,dx$$ وقتی X پیوسته با تابع چگالی $f(x)$ باشد

قضیه :
$$\left.\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right|_{t=0} = \mu'_r$$

حال تابع مولد گشتاورها را برای بعضی از توزیع های استاندارد محاسبه می کنیم .

قضیه : تابع مولد گشتاورهای توزیع دو جمله ای بصورت زیر است :

$$M_X(t) = \left[1 + \theta(e^t - 1)\right]^n$$

اثبات :

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}(\theta e^t)^x(1-\theta)^{n-x}$$

که این همان بسط دو جمله ای $\left[\theta e^t + (1-\theta)\right]^n$ است .

$$M_X(t) = \left[\theta e^t + (1-\theta)\right]^n = \left[1 + \theta(e^t - 1)\right]^n$$

قضیه : تابع مولد گشتاورهای توزیع پواسون بصورت زیر است :

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

اثبات :

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}.\frac{\lambda^x.e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda}.e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

قضیه : تابع مولد گشتاور توزیع نمایی با پارامتر λ بصورت زیر است :

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \qquad \lambda > t$$

اثبات :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx}.\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda\int_0^{\infty} e^{-(\lambda - t)x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}; \quad \lambda > t$$

قضیه : تابع مولد گشتاورهای توزیع نرمال بصورت زیر است :

$$M_X(t) = e^{(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2})}$$

اثبات به عنوان تمرین .

بنابراین تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z بصورت زیر بدست می آید :

$$Z \sim N(0,1) \Rightarrow M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

برخی از خواص تابع مولد گشتاورها را می توان بصورت قضیه زیر بیان کرد :

قضیه : اگر a مقداری ثابت باشد ، داریم :

1) $M_{X+a}(t) = E[e^{(X+a)t}] = e^{at}.M_X(t)$

2) $M_{aX}(t) = E(e^{aXt}) = M_X(at)$

3) $M_X(t) = M_Y(t) \Leftrightarrow F_X(t) = F_Y(t)$

5-2- گشتاورهای حاصلضربی و تابع مولد گشتاورهای توأم

تعریف : r امین و s امین گشتاور حاصلضربی حول مبدأ متغیرهای تصادفی X و Y که با $\mu'_{r,s}$ نشان داده میشود ، امید ریاضی $X^r Y^s$ است . یعنی :

$$\mu'_{r,s} = E(X^r Y^s) = \sum_x \sum_y x^r y^s.f(x,y)$$ وقتی X و Y گسسته اند

$$\mu'_{r,s} = E(X^r Y^s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s.f(x,y)\,dxdy$$ وقتی X و Y پیوسته اند

$$\mu'_{1,0} = E(X) \qquad \mu'_{0,1} = E(Y)$$

تعریف : r امین و s امین گشتاور حاصلضربی دو متغیر تصادفی X و Y حول میانگین هایشان که با $\mu_{r,s}$

نشان داده میشود ، بصورت زیر بدست می آید :

$$\mu_{r,s} = E\left[(X-\mu_X)^r (Y-\mu_Y)^s\right]$$

$$\mu_{1,1} = E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] = Cov(X,Y)$$

تعریف : تابع $M_{X,Y}(t_1,t_2) = E(e^{t_1 X + t_2 Y})$ تابع مولد گشتاور توأم X و Y نامیده می شود .

قضیه :

$$\left.\frac{\partial^{i+j}}{\partial t_1{}^i \partial t_2{}^j} M_{X,Y}(t_1,t_2)\right|_{t_1,t_2=0} = \mu'_{i,j}$$

فصل هفتم

قضایای حدی

در این فصل قضایایی را مطرح می کنیم که ما را در یافتن کران بالا یا کران پایین برخی احتمالات کمک می کنند .

1- نامساوی مارکوف

قضیه : اگر $u(X)$ یک تابع غیرمنفی از متغیر تصادفی X باشد ، آنگاه برای هر ثابت مثبت c داریم :

$$P[u(X) \geq c] \leq \frac{E[u(X)]}{c}$$

2- نامساوی چبیشف

قضیه : اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس متناهی σ^2 باشد، آنگاه برای هر $k > 0$ خواهیم داشت :

$$P(|X-\mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

نامساوی چبیشف معمولاً به چند صورت زیر نمایش داده میشود که همگی معادل یکدیگر می باشند :

$$P(|X-\mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2} \qquad P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

$$P(|X-\mu| < k) \geq 1-\frac{\sigma^2}{k^2} \qquad P(-k < X-\mu < k) \geq 1-\frac{\sigma^2}{k^2}$$

اهمیت نامساویهای مارکوف و چبیشف در این است که هرگاه فقط میانگین و یا میانگین و واریانس توزیعی معلوم باشند میتوان کرانهایی را روی مقادیر احتمال تعیین نمود . البته وا ضح است که اگر نوع توزیع معلوم باشد ، آنگاه احتمال های مورد نظر دقیقاً قابل محاسبه هستند .

مثال : فرض کنید می دانیم که تعداد محصولات تولید شده در یک کارخانه در طول هفته ، یک متغیر تصادفی با میانگین 50 است .

الف) در ارتباط با احتمال اینکه تولید محصول یک هفته معین بیش از 75 باشد چه می توان گفت؟

ب) اگر واریانس تولید هفتگی برابر 25 باشد، آنگاه در مورد احتمال اینکه محصول یک هفته معین بین 40 و 60 باشد چه میتوان گفت؟

X : تعداد محصول تولیدی کارخانه در یک هفته

الف) با توجه به نامساوی مارکوف

$$P(X > 75) \leq \frac{E(X)}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$$

ب) با توجه به نامساوی چبیشف

$$P(40 < X < 60) = P(-10 < X - 50 < 10) \geq 1 - \frac{25}{100} = 0.75$$

پس احتمال اینکه تولید یک هفته معین بین 40 و 60 باشد، حداقل برابر 0.75 است .

3- نمونه تصادفی

تعریف : اگر X_1 , X_2 , ..., X_n متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع باشند ، می‌گوییم تشکیل یک نمونه تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی را می‌دهند که توسط توزیع مشترک آنها مشخص می‌شود .

اگر $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ مقدار توزیع توأم چنین مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی باشد ، می‌توان نوشت :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

که در آن $f(x_i)$ مقدار توزیع جامعه در x_i است .

تعریف : اگر X_1 , X_2 ,..., X_n نمونه‌ای تصادفی را تشکیل دهند آنگاه $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ میانگین نمونه‌ای نامیده می‌شود .

قضیه (قانون اعداد بزرگ) : اگر X_1 , X_2 ,..., X_n دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان و با میانگین متناهی $E(X_i)=\mu$ باشند . آنگاه برای هر $\varepsilon>0$ خواهیم داشت :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\mu\right|\geq\varepsilon\right)=0$$

یعنی وقتی تعداد اعضای نمونه زیاد شود در نتیجه میانگین نمونه برابر میانگین جامعه می گردد .

قضیه : اگر X_1 , X_2 ,..., X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی را تشکیل دهند که میانگین آن μ و واریانس آن σ^2 است . آنگاه :

$$E(\overline{X})=\mu \qquad Var(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$$

قضیه حد مرکزی : اگر X_1 , X_2 ,..., X_n نمونه‌ای تصادفی از جامعه‌ای نامتناهی را تشکیل دهند که دارای میانگین μ و واریانس σ^2 است . در این صورت میانگین نمونه ای دارای توزیع نرمال استاندارد است . بعبارت دیگر ، توزیع حدی $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ وقتی $n\to\infty$ توزیع نرمال استاندارد است .

در واقع وقتی n بزرگ باشد ، توزیع $\overline{X}$ با توزیع نرمالی به میانگین μ و واریانس $\dfrac{\sigma^2}{n}$ تقریب زده میشود .

در عمل وقتی $n\geq 30$ باشد ، از این تقریب بدون توجه به شکل جامعه مورد نمونه‌گیری استفاده می شود .

جالب توجه است که وقتی جامعه مورد نمونه‌گیری نرمال باشد ، توزیع $\overline{X}$ صرفنظر از اندازه n نرمال خواهد بود . یعنی قضیه زیر را خواهیم داشت :

قضیه : اگر $\overline{X}$ میانگین یک نمونه تصادفی به اندازه n از جامعه نرمالی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد ،

توزیع میانگین نمونه‌ای آن نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ است .

مثال : یک دستگاه خودکار فروشنده نوشابه لیوانی را طوری تنظیم کرده‌اند که مقدار نوشابه‌ای که هر بار از آن خارج می شود ، متغیری تصادفی با میانگین 200 میلی‌لیتر و انحراف معیار 15 میلی‌لیتر است . مطلوب است احتمال اینکه متوسط (میانگین) مقدار نوشابه‌ای که در یک نمونه تصادفی به اندازه 36 از آن خارج می شود ، حداقل 204 میلی‌لیتر باشد .

حل :

X : مقدار نوشابه خارج شده در هر بار $\mu = 200 \quad \sigma = 15 \quad n = 36$

$\overline{X}$: متوسط مقدار نوشابه خارج شده در نمونه تصادفی

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 200 \qquad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{15}{6} = 2.5$$

$$P(\overline{X} \ge 204) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \ge \frac{204 - 200}{2.5}\right) = P(Z \ge 1.6) = 0.0548$$

منابع و مراجع

1- مبانی احتمال   تألیف : شلدون راس   ترجمه : دکتر علی همدانی – دکتر احمد پارسیان

2- آمار ریاضی   تألیف : جان فروند   ترجمه : علی عمیدی – محمد قاسم وحیدی اصل

3- نظریه احتمال و کاربرد آن   تألیف : دکتر سید تقی اخوان نیاکی

4- نظریه احتمالات و نتیجه گیری آماری   تألیف : هرولد ج . لارسن   ترجمه : غلامحسین همدانی

5- احتمال و استنباط آماری   تألیف : رابرت هاگ – الیوت تانیس   ترجمه : دکتر نوروز ایزد دوستدار

پیوست

نمونه سؤالات امتحانی

1- سه جعبه وجود دارد که جعبه اول دارای 2 توپ سفید و 2 توپ سیاه است ، جعبه دوم دارای 2 توپ سفید و یک توپ سیاه میباشد ، و جعبه سوم دارای یک توپ سفید و 3 توپ سیاه است .

الف) یک جعبه بطور تصادفی انتخاب کرده و از داخل آن یک توپ بطور تصادفی خارج می کنیم . احتمال آنکه این توپ سفید باشد چقدر است ؟

ب) اگر بدانیم که توپ انتخابی سفید بوده ، احتمال اینکه جعبه دوم انتخاب شده باشد چقدر است ؟

2- متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال زیر است :

$$f(x)=\frac{25-x^2}{95}; \qquad x=0,1,2,3,4$$

الف) $P(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2})$ را بدست آورید .   ب) $E(2X+10)$ را بدست آورید .

3- تابع چگالی احتمال X بصورت زیر است :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x(2-x) & ; \quad 0<x<2 \\ 0 & ; \quad \text{سایر جاها}\end{cases}$$

الف) تابع توزیع X را بدست آورید .   ب) $Var(X)$ را محاسبه کنید .

4- احتمال خرابی یکی از موتورهای هواپیمای در حال پرواز برابر $\frac{1}{4}$ است . فرض کنید که هر موتور بطور مستقل از دیگر موتورها کار میکند . اگر بدانیم یک هواپیمای در حال پرواز موقعی سقوط میکند که حداقل نصف تعداد موتوهایش از کار بیافتد ، یک هواپیمای دو موتوره مطمئن تر است یا یک هواپیمای چهار موتوره ؟

5- ظرفی شامل 4 توپ سفید و 2 توپ سیاه است . به تصادف 2 توپ از ظرف انتخاب می کنیم . اگر یک توپ سفید و یک توپ سیاه باشد ، آزمایش را متوقف می کنیم ؛ در غیر اینصورت توپها را به ظرف برگردانده و دوباره 2 توپ به تصادف انتخاب می کنیم . این آزمایش آنقدر تکرار میشود تا به نتیجه مطلوب

برسیم (یک توپ سفید و یک توپ سیاه باشد) . احتمال اینکه در سومین آزمایش به نتیجه مطلوب برسیم ، چقدر است ؟

6- تعداد خرابیهای یک دستگاه چاپگر دارای توزیع پواسون با متوسط دو بار خرابی در ماه میباشد .

الف) احتمال اینکه این چاپگر در شش ماه حداقل دو بار خراب شود ، چقدر است ؟

ب) احتمال اینکه این چاپگر در دو ماه کمتر از سه بار خراب شود ، چقدر است ؟

7- چنانچه وقوع تصادفات اتومبیل در یک اتوبان ، یک فرآیند پواسون با نرخ وقوع 3 تصادف در شبانه روز باشد :

الف) احتمال اینکه در یک شبانه روز حداقل 2 تصادف رخ دهد ، چقدر است ؟

ب) احتمال اینکه فاصله زمانی بین دو تصادف متوالی حداقل 8 ساعت باشد ، چقدر است ؟

ج) احتمال شرطی اینکه فاصله زمانی بین دو تصادف متوالی حداقل 8 ساعت باشد ، چنانچه 4 ساعت پس از وقوع تصادف قبلی ، هنوز تصادف دیگری رخ نداده باشد ، چقدر است ؟

8- طول عمر کپسولهای گاز بطور متوسط 45 روز است که دارای توزیع نرمال میباشد .

الف) فرض کنید 15000 خانوار از این کپسولها خریده باشند . با در نظر گرفتن انحراف معیار 6 روز برای این توزیع ، چند تا از این کپسولها بیشتر از 40 روز کار نمی کنند ؟

ب) اگر بخواهیم احتمال عمر کپسول بین 40 تا 50 روز از 0.9 کمتر نباشد ، ماکزیمم انحراف معیار چقدر باید باشد ؟

9- تابع چگالی احتمال توأم X و Y بصورت زیر داده شده است :

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & ; \quad x\ge 0, y\ge 0 \\ 0 & ; \quad \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) $P(X<Y)$ را بدست آورید .   ب) $P(X<a \mid Y>a)$ را محاسبه کنید .

ج) میانگین شرطی Y به شرط $X=a$ را بدست آورید .

د) نشان دهید که متغیرهای تصادفی X و Y مستقل هستند .

ه) تابع مولد گشتاورهای $Z=X+Y$ را بدست آورید .

10- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی باشند که بطور توأم توزیع میشوند . همچنین $U=X+Y$ و $V=X-Y$ را در نظر بگیرید . اگر $\sigma_X^2=\sigma_Y^2$ باشد ، نشان دهید که $\rho_{UV}=0$ است .

11- فرض کنید 16 باتری مخصوص داریم که طول عمرشان بطور مستقل دارای توزیع نرمال با میانگین 5 ساعت و انحراف معیار 2 ساعت میباشد . باتری ها بگونه ای در یک مدار الکتریکی قرار گرفته اند که با از کار افتادن هر یک از آنها ، باتری دیگر در مدار قرار می گیرد . احتمال اینکه پس از گذشت 84 ساعت هنوز مدار الکتریکی برقرار باشد ، چقدر است ؟

12- در مخزن یک جایگاه فروش بنزین هفته ای یک بار بنزین ریخته میشود . فرض کنید مقدار فروش بنزین در این جایگاه در هفته (به هزار لیتر) ، متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال زیر باشد :

$$f(x)=\begin{cases}5(1-x)^4 & ; \quad 0<x<1\\ 0 & ; \quad \text{سایر}\end{cases}$$

الف) احتمال اینکه مقدارفروش بنزین درهفته مابین 250 و 500 لیتر باشد یعنی $P(\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2})$ را بدست آورید .

ب) امید ریاضی و واریانس $\frac{1}{1-X}$ را بدست آورید .

ج) گنجایش مخزن بنزین چقدر باشد تا احتمال خالی شدن آن در طول یک هفته فقط 0.01 شود ؟

14- در ماشین خاصی اندازه قطر خارجی میله های تولید شده توزیع نرمال با میانگین 0.2508 انحراف معیار 0.0005 سانتیمتر دارد . اگر اندازه استاندارد 0.25 ± 0.0015 سانتیمتر تعیین شده باشد ، چند درصد از میله های تولید شده غیر استاندارد است ؟

15- طول واقعی نوعی لوله 90 سانتیمتری که در کارخانه ای ساخته میشود ، به علل فنی با توزیع یکنواخت در فاصله (90.25 ,89.75) سانتیمتر میباشد . مطلوبست احتمال اینکه طول متوسط 50 عدد از لوله های تولیدی مابین 89.95 سانتیمتر و 90.05 سانتیمتر قرار گیرد .

16- آنتن یک سیستم رادارکه درارتفاعات نصب گردیده از 5 جزء تشکیل شده است.این آنتن بگونه ای است که اگرحداقل 3 جزء ازآن کارکند، سیستم رادار فعال خواهد بود .در یک روز بارانی هریک از اجزاء بطورمستقل از یکدیگر با احتمال $\frac{1}{3}$ کارمیکنند ، اما برای یک روز غیربارانی این احتمال برابر $\frac{3}{4}$ میباشد . سوابق گذشته نشان میدهد که احتمال بارش باران در هر روز برابر 60 درصد میباشد .

الف) احتمال اینکه در یک روز سیستم رادار فعال باشد ، چقدر است ؟

ب) اگردریک روز سیستم رادار فعال بوده، احتمال اینکه درمحل نصب آنتن هوا بارانی باشد ،چقدر است؟

17- پهنای قطعه ای دریک فرآیند ساخت ، متغیر تصادفی نرمال با میانگین 9 و انحراف معیار 0.03 سانتیمتر است . اگر حدود (تلرانس) فنی بصورت 9 ± 0.05 تعریف شود :

الف) چند درصد از قطعات معیوب خواهند بود ؟

ب) اگر میانگین همچنان 9 باشد ، چنانچه بخواهیم از 100 قطعه بیش از یک قطعه معیوب نباشد ، حداکثر مجاز انحراف معیار چقدر باید باشد ؟

18- تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی X و Y بصورت زیر داده شده است :

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y \ ; & x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 0 \ ; & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

الف) $P(Y > \frac{1}{2} \mid X = \frac{1}{3})$ را بدست آورید .

ب) میانگین و واریانس Y به شرط $X = \frac{1}{3}$ را بدست آورید .